١٤٢٩ هـ

شرح الباب الأول القطوع المخروطية

إعداد /

طارق بن عامر آل سعدون الصيعري

نشر الشرح في منتديات رياضيات جدة

القطوع المخروطية :

سنتعرف في هذا الباب على ثلاثة أنواع من المنحنيات تعرف معاً بالقطوع المخروطية لأن كل منها يمكن الحصول عليه من تقاطع مخروط مع المستوى وهي ثلاثة أنواع كالتالي :

① القطع المكافئ . ② القطع الناقص . ③ القطع الزائد .

أولاً : القطع المكافئ / شُلْجم (parabola) :

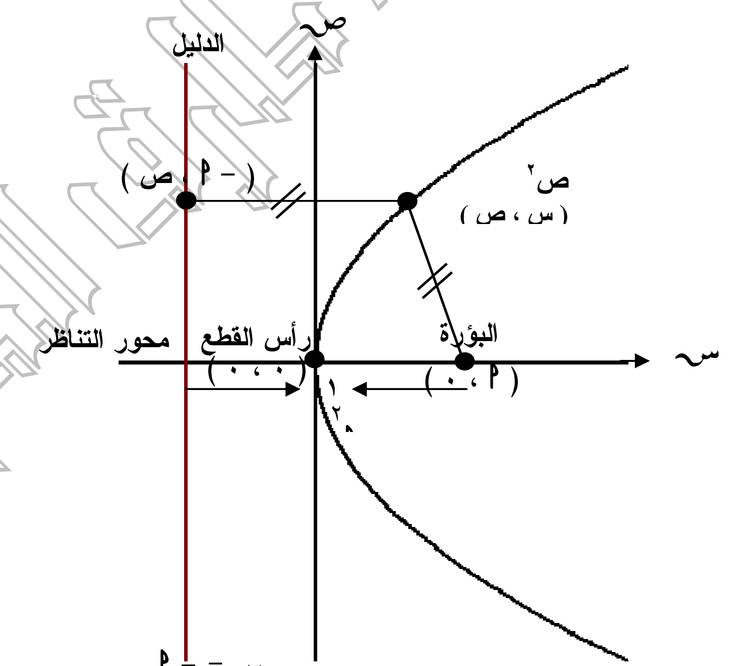
تعريف:

في المستوى ے إذا كان ل مستقيماً ثابتاً وكانت ب نقطة ثابتة (ب ∌ ل) فإننا ندعو مجموعة نقط هذا المستوى التي يتساوى بعدا كل منهما عن ل ، ب : قطعاً مكافئاً

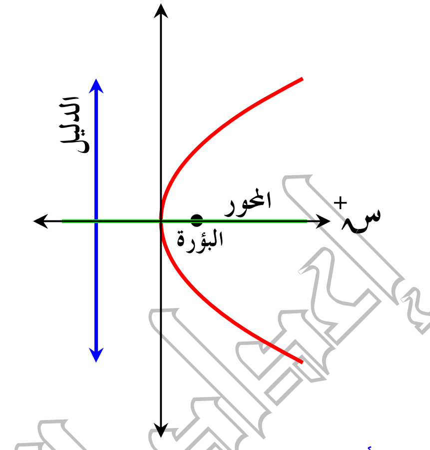
نسمي النقطة الثابتة (بؤرة القطع المكافئ) ، ونسمي المستقيم المعلوم (دليل القطع المكافئ)

صفات القطع المكافئ :

١] الرأس ٢] فتحة القطع ٣] البؤرة ٤] معادلة الدليل ٥] معادلة محور التناظر(البؤري)



الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل



الحالة الأولى :

فتحة القطع في اتجاه محور السينات الموجب (لليمين)

① معادلة القطع : ص^{2} = ٤ أ س

② الرأس (٠ ، ٠) ③ البؤرة (أ ، ٠)

④ معادلة الدليل : س = − أ

⑤ محور التناظر منطبق على محور سَ ومعادلته : ص = ٠

الحالة الثانية :

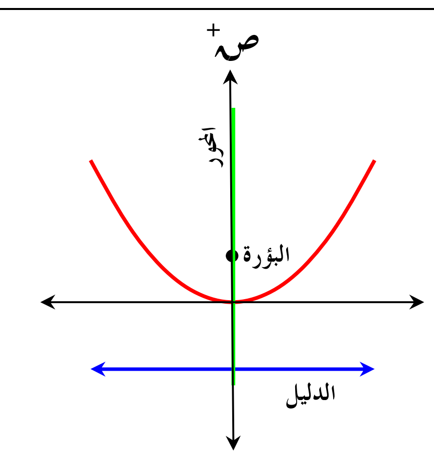
فتحة القطع في اتجاه محور السينات السالب (لليسار)

① معادلة القطع : ص^{2} = − ٤ أ س

② الرأس (٠ ، ٠) ③ البؤرة (− أ ، ٠)

④ معادلة الدليل : س = أ

⑤ محور التناظر منطبق على محور سَ ومعادلته : ص = ٠



الحالة الثالثة :

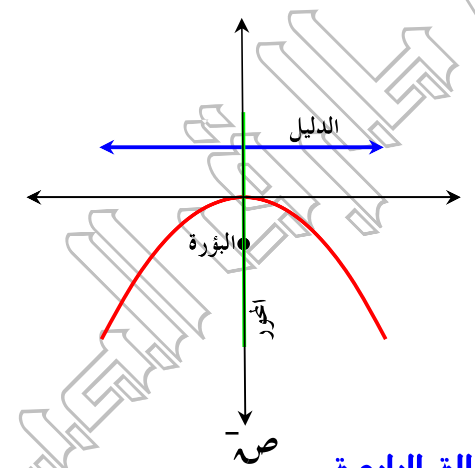
فتحة القطع في اتجاه محور الصادات الموجب (للأعلى)

① معادلة القطع : س^{2} = ٤ أ ص

② الرأس (٠ ، ٠) ③ البؤرة (٠ ، أ)

④ معادلة الدليل : ص = − أ

⑤ محور التناظر منطبق على محور صَ ومعادلته : س = ٠



الحالة الرابعة :

فتحة القطع في اتجاه محور الصادات السالب (للأسفل)

① معادلة القطع : س^{2} = − ٤ أ ص

② الرأس (٠ ، ٠) ③ البؤرة (٠ ، − أ)

④ معادلة الدليل : ص = أ

⑤ محور التناظر منطبق على محور صَ ومعادلته : س = ٠

ملاحظات هامة :

① البعد بين البؤرة والدليل = ٢ م

② القطع المكافئ متماثل بالنسبة لمحور التناظر .

③ فتحة القطع دائماً تتجه من الرأس إلى البؤرة .

④ رأس القطع يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل .

⑤ أهم جزء في القطع المكافئ هو محور التناظر لأنه يمر بالرأس و البؤرة ويقطعه الدليل بزاوية قائمة .

وسنحدد في كل حالة من حالات القطع المكافئ الصفات التالية :

إحداثيات الرأس ، إحداثيات البؤرة ، معادلة الدليل ، معادلة محور التناظر ، اتجاه فتحة القطع المكافئ .

والقطع المكافئ له أهمية كبرى في حياتنا اليومية فمثلاً تجمع الطاقة الشمسية بواسطة مرايا على هيئة قطـوع مخروطيـة ، كذلك من أوضح الأمثلة في استخدام القطوع المخروطية الصحون اللاقطة للبث الفضائي تكون علـى شـكل قطـوع مخروطية .

أنواع مسائل القطوع المخروطية :

① إما أن تُعطى لك المعادلة ويُطلب منك الصفات .

② أو يعطيك بعض الصفات ويطلب المعادلة .

تذكر أن :

دائماً في مسائل القطع المكافئ إذا أعطي لك المعادلة انظر إلى المجهول في الطرف الأيسر فهو يحدد فتحة القطع ومعادلتـه القياسية .

كذلك لاتنسى :

إذا أعطى لك الصفات ارسم رسم تقريبي تحدد بواسطته الصورة القياسية ثم أوجد قيمـة م بعد ذلك أوجد المعادلـة المطلوبة .

التنسى :

كما ذكرنا سابقاً أن مسائل القطوع تنقسم إلى قسمين ــ في الغالب ــ إما معادلة ويطلب صفات أو صفات ويطلب معادلة وسنمر بهذين النوعين في المثالين القادمين .

مثال (١) : عين البؤرة والدليل للقطع المكافئ الذي معادلته ص^{٢} = ٤ س ثم ارسمه

الحل :

واضح من المثال أن المطلوب هو صفات للقطع ومعطى معنا معادلة .

كيف نستنتج الصفات ؟

دائماً إذا أعطي لنا معادلة ننظر للطرف اليسر من المعادلة فهو الذي يحدد نوع القطع .

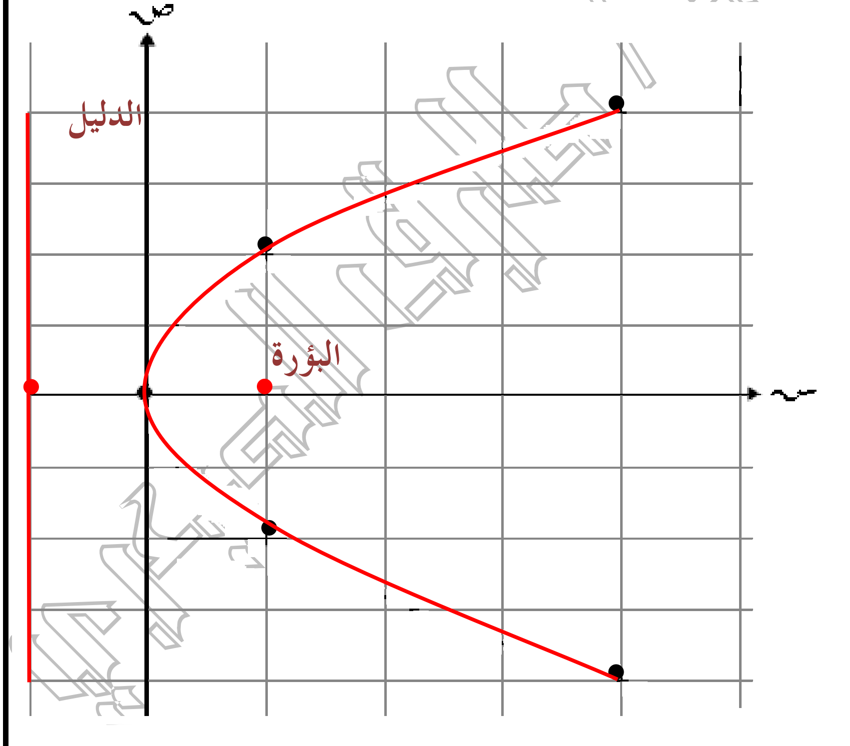
∵ المجهول في الطرف الأيسر س ⇐ نوع القطع سيني .

الآن هل هو سيني موجب أو سالب ؟

وهذا يحدده إشارة المجهول في الطرف الأيسر وبما أن المجهول في الطرف الأيسر إشارته موجبة ⇐ القطع سيني موجب .

∴ الصورة القياسية هي : ص^{٢} = ٤م س ⇐ ٤م = ٤ ⇐ م = ١

البؤرة : (م ، ٠) ⇐ (١ ، ٠)



ولرسمه نختار نقاط مناسبة لـــ س

ونوجد قيمة ص

والتنسى :

في الرسم توضيح البؤرة والدليل والرأس .

س	٠	١	٤
ص	٠	٢	٤

ملاحظة أخيرة :

قيمة م لاتكون إلا موجبة لأنها طول وهي المسافة من الرأس إلى البؤرة أو من الرأس إلى الدليل .

أطلت في هذا المثال حتى أوضح طريقة التفكير وإلا بقية الأمثلة سنمر عليها سريعا

مثال (٢) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (− ٢ ، ٠)

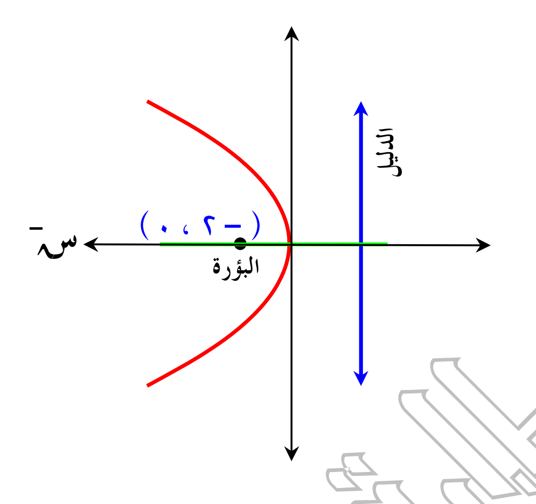
الحل :

لاتنسى أن : فتحة القطع تتجه نحو البؤرة عكس الدليل .

هذي هي الصورة الأخرى من صور أسئلة القطوع حيث أعطانا صفات وطلب معادلة .

وهذي الصورة لها أكثر من طريقة لاستنتاج المعادلة سأذكر ما أظن بأنها الطريقة الأسهل .

في مثل هذه المسائل نرسم رسم تقريبي من الصفات المعطى معنا .



من تحديد البؤرة كما في الرسم نلاحظ أن القطع سيني سالب

ومعادلته القياسية : ص^{٢} = − ٤ م س

وبؤرته : (− م ، ٠)

الآن : نحتاج إلى قيمة م ؟

∵ البؤرة هي : (−٢ ، ٠) ⇐ م = ٢

∴ معادلة القطع المطلوبة هي : ص^{٢} = − ٨ س

وكما قلت في المثال السابق :

أطلت في هذا المثال حتى أوضح طريقة التفكير وإلا بقية الأمثلة سنمر عليها سريعا

مثال (٣) :

عين إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ : ص^{٢} = ١٢ س .

الحل :

المعادلة تمثل معادلة قطع مكافئ فتحته نحو س$^{+}$ ، ورأسه (٠ ، ٠)

⇐ الصورة القياسية هي : ص^{٢} = ٤ م س

⇐ ٤م = ١٢ ⟺ م = ٣

إحداثيات البؤرة = ب (٣ ، ٠)

معادلة الدليل : س = −٣

مثال (٤) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٠ ، −١) ، ورأسه (٠ ، ٠)

الحل :

إذا رسمنا رسم تقريبي سنلاحظ أن البؤرة في المحور الصادي السالب .

⇐ القطع صادي سالب ومعادلته هي : س^{٢} = − ٤ م ص

نحتاج إلى قيمة م .

∵ البؤرة : (٠ ، −١) ⇐ م = ١

∴ معادلة القطع هي : س^{٢} = − ٤ ص

تطبيقات على الدرس

تطبيق (١) : أوجد صفات القطع المكافئ الذي معادلته : $س^٢ + ١٢ ص = ٠$

تطبيق (٢) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (− ٦ ، ٠) ، ومعادلة دليله س = ٦ ثم ارسمه .

تطبيق (٣) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٠ ، − $\frac{١}{٤}$) ، ومعادلة دليله ص = $\frac{١}{٤}$

تطبيق (٤) : ضع معادلة القطع المكافئ $٣ص^٢ − ٥س = س$ في صورته القياسية ثم استنتج الصفات .

تطبيق (٥) : حدد صفات القطع الذي معادلته : $س^٢ = − ١١ ص$.

تطبيق (٦) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته (٠ ، $\frac{٣}{٤}$) وأوجد معادلة دليله.

تطبيق (٧) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠,٠) ويمر بالنقطة (٣,٢) ومحوره منطبق على سـ ٠

تطبيق (٨) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله : ٥ س + ١٥ = ٠

تطبيق (١) :

أوجد صفات القطع المكافئ الذي معادلته : س^{٢} + ١٢ ص = ٠

الحل :

نرجع المعادلة إلى الصورة القياسية وذلك بجعل المجهول الذي فيه التربيع في طرف والبقية في الطرف الآخر .

⇐ س^{٢} = − ١٢ ص

ثم ننظر للطرف الأيسر من المعادلة نلاحظ أن المجهول هو ص وإشارة معامله سالبة

∴ القطع صادي سالب وصورته القياسية : س^{٢} = − ٤ م ص

الآن : نوجد قيمة م مع ملاحظة أن م دائماً موجبة ⇐ − ٤ م = − ١٢ ⇐ م = ٣

والآن نحدد الصفات :

① إحداثيات الرأس : (٠ ، ٠) ② إحداثيات البؤرة : (٠ ، − ٣)

③ معادلة الدليل : ص = ٣ ④ فتحة القطع نحو ص⁻

⑤ محور التناظر منطبق على المحور السيني ومعادلته : س = ٠

تطبيق (٢) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (− ٦ ، ٠) ، ومعادلة دليله س = ٦ ثم ارسمه .

الحل :

∵ البؤرة تقع في المحور السيني السالب ⇐ فتحة القطع نحو : س⁻

∴ معادلة القطع القياسية هي : ص^{٢} = − ٤ م س

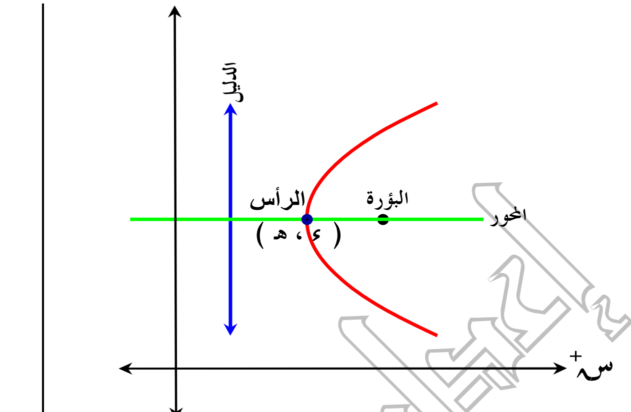
الآن : نحتاج إلى قيمة م نستطيع أن نستنتجها من إحداثيات البؤرة أو معادلة الدليل .

واضح أن قيمة م = ٦ (لاتنسى أن م دائماً موجبة)

⇐ المعادلة المطلوبة : ص^{٢} = − ٢٤ س

وخطوات الرسم كما في مثال (١)

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (ء ، هـ)



الحالة الأولى :

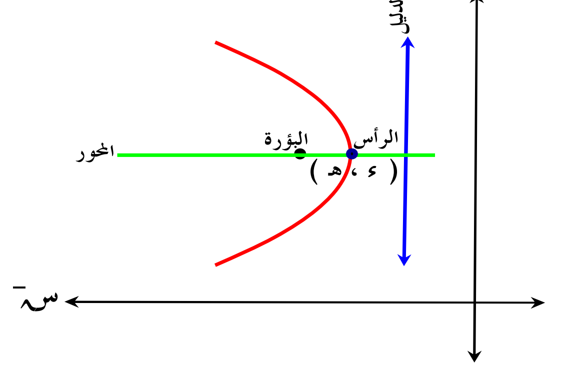
فتحة القطع في اتجاه محور السينات الموجب (لليمين)

① معادلة القطع : (ص – هـ)^{2} = ٤ م (س – ء)

② الرأس (ء ، هـ) ③ البؤرة (م + ء ، هـ)

④ معادلة الدليل : س = – م + ء

⑤ محور التناظر يوازي المحور س ومعادلته : ص = هـ



الحالة الثانية :

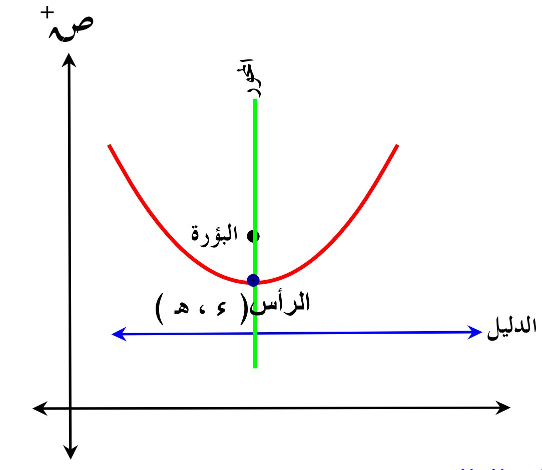
فتحة القطع في اتجاه محور السينات السالب (لليسار)

① معادلة القطع : (ص – هـ)^{2} = – ٤ م (س – ء)

② الرأس (ء ، هـ) ③ البؤرة (– م + ء ، هـ)

④ معادلة الدليل : س = م + ء

⑤ محور التناظر يوازي المحور س ومعادلته : ص = هـ



الحالة الثالثة :

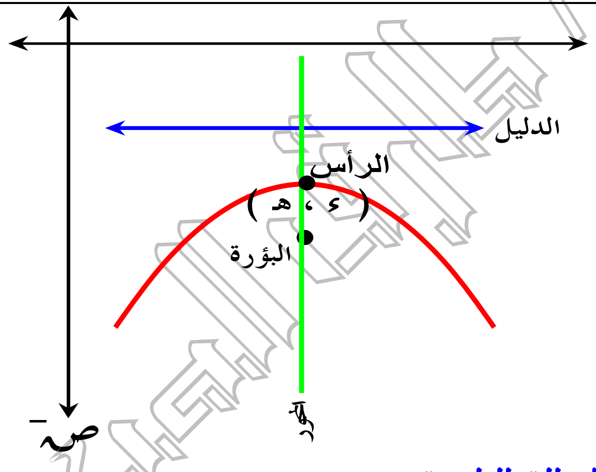
فتحة القطع في اتجاه محور الصادات الموجب (للأعلى)

① معادلة القطع : (س – ء)^{2} = ٤ م (ص – هـ)

② الرأس (ء ، هـ) ③ البؤرة (ء ، م + هـ)

④ معادلة الدليل : ص = – م + هـ

⑤ محور التناظر يوازي المحور ص ومعادلته : س = ء



الحالة الرابعة :

فتحة القطع في اتجاه محور الصادات السالب (للأسفل)

① معادلة القطع : (س – ء)^{2} = – ٤ م (ص – هـ)

② الرأس (ء ، هـ) ③ البؤرة (ء ، – م + هـ)

④ معادلة الدليل : ص = م + هـ

⑤ محور التناظر يوازي المحور ص ومعادلته : س = ء

☜ تذكر أن :

لاستنتاج صفات القطع المكافئ الذي رأسه (ء ، هـ) أو إيجاد معادلته لابد من إيجاد قيم : ٢ ، ء ، هـ

☜ ملاحظة :

① المربع الكامل هو إضافة مربع نصف معامل س أو ص للطرفين .

② الحد الأوسط : معامل س أو معامل ص .

☜ خطوات وضع معادلة الدرجة الثانية في الصورة القياسية :

① نضع مجهول الدرجة الثانية في الطرف الأيمن ومجهول الدرجة الأولى والعدد الثابت في الطرف الأيسر .

② نقسم جميع الأطراف على معامل مجهول الدرجة الثانية إذا كان $\neq$ +١ .

③ نجري عملية إكمال المربع للطرف الأيمن ، وذلك بإضافة نصف مربع معامل س للطرفين وذلك كالتالي : معامل س ⟵ ننصفه ⟵ نربعه .

④ نأخذ معامل مجهول الدرجة الأولى كعامل مشترك إن وجد .

⑤ نساوي المعادلة الناتجة بالصورة القياسية ونستخرج المجاهيل الثلاثة : ٢ ، ب ، جـ .

☜ صورة أخرى لمعادلة القطع المكافئ :

أولاً : س = ٢ ص٢ + ب ص + جـ ، ٢ $\neq$ ٠

معادلة قطع مكافئ محور تناظره // محور السينات ، حيث :

① إذا كان ٢ > ٠ أي موجب ، فإن فتحته في الاتجاه الموجب لمحور السينات .

② إذا كان ٢ < ٠ أي سالب ، فإن فتحته في الاتجاه السالب لمحور السينات .

ثانياً : ص = ٢ س٢ + ب س + جـ ، ٢ $\neq$ ٠

معادلة قطع مكافئ محور تناظره // محور الصادات ، حيث :

① إذا كان ٢ > ٠ أي موجب ، فإن فتحته في الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

② إذا كان ٢ < ٠ أي سالب ، فإن فتحته في الاتجاه السالب لمحور الصادات .

تذكر أن :

إذا أعطي في السؤال الرأس والبؤرة نلاحظ الآتي إذا كانت السينات ثابتة والصادات متغيرة فالفتحة نحو الصادات ، وإذا كانت الصادات ثابتة والسينات متغيرة فالفتحة نحو السينات .

تذكر أن :

لإيجاد قيمة م من الرأس والبؤر

(١) إذا كانت الفتحة نحو السينات فإن : م = | فرق السينات |

(٢) إذا كانت الفتحة نحو الصادات فإن : م = | فرق الصادات |

تذكر أن :

لإيجاد قيمة م من الرأس والدليل :

(١) إذا كان الدليل عمودي على السينات فإن : م = | فرق السينات |

(٢) إذا كان الدليل عمودي على الصادات فإن : م = | فرق الصادات |

تذكر أن :

إذا أعطي لك في السؤال البؤرة والدليل فنستخدم قانون منتصف المسافة بين نقطتين لإيجاد نقطة الرأس حيث أن قانون منتصف المسافة هو : $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$ ؛ كالتالي :

(١) إذا كان الدليل عمودي على السينات فإن : الرأس = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \text{ ، ص} \right)$

(٢) إذا كان الدليل عمودي على الصادات فإن : الرأس = $\left(\text{س ، } \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

تذكر أن : الرسم يساعد في معرفة الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ .

مثال (١) : استنتج صفات القطع المكافئ الذي معادلته : $(ص - ٥)^٢ = - ٤ (س - ١)$.

الحل :

كما قلت سابقاً إذا أعطي لنا معادلة ننظر للطرف اليسر من المعادلة فهو الذي يحدد نوع القطع .

وبالنظر للطرف الأيسر نلاحظ أن المجهول هو سـ والإشارة سالبة .

∴ نوع القطع سيني سالب أي فتحته نحو $\overline{سـ}$ ، ومعادلته القياسية : $(ص - هـ)^٢ = - ٤ م (س - ء)$

وبمقارنة المعادلتين ببعضهما نجد أن : م = ١ ، هـ = ٥ ، ء = ١

الآن : نوجد الصفات :

① إحداثيات الرأس : (١ ، ٥) ② إحداثيات البؤرة : (- م + ء ، هـ) = (٠ ، ٥)

③ معادلة الدليل : س = م + ء = ٢ ④ فتحة القطع نحو : $\overline{سـ}$

⑤ محو التناظر // سـ ومعادلته : ص = هـ = ٥

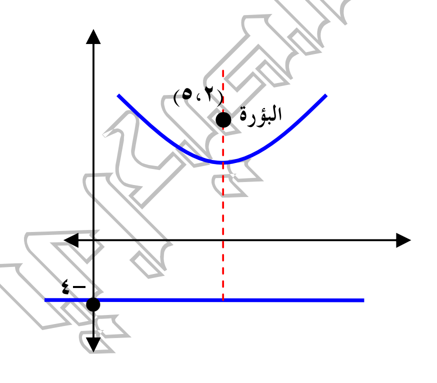
مثال (٢) : أوجد معادلة مجموعة النقط في المستوى والتي يكون بعدها عن النقطة (٥ ، ٢) مساوياً بعدها عن المستقيم ص = - ٤

الحل :

هذا هو تعريف القطع المكافئ ، وهذا من الأجزاء النظرية التي يجب أن يهتم بها الطالب .

نجد أن النقطة الثابتة هي البؤرة والمستقيم الثابت هو الدليل .

بعد توضيح النقاط في المستوى الإحداثي كما في الرسم ـــ تقريبي ـــ نلاحظ أن القطع صادي موجب ومعادلته القياسية : $(س - ء)^٢ = ٤ م (ص - هـ)$



نحتاج إلى قيم : م ، ء ، هـ لإيجاد المعادلة المطلوبة .

∵ إحداثيات البؤرة : (ء ، م + هـ) = (٥ ، ٢)

⇐ ء = ٥ ، م + هـ = ٢ ....(١)

∵ معادلة الدليل : ص = - ٤ ⇐ - م + هـ = - ٤ ....(٢)

بجمع (١) + (٢) نجد أن : هـ = - ١ ، م = ٣

∴ المعادلة المطلوبة : $(س - ٥)^٢ = ٤ م (ص + ١)$

مثال (٣) :

قوس على شكل قطع مكافئ معادلته : $س^٢ - ٤س + ١٢ص = ٠$ حيث قاعدة القوس أفقية . ما ارتفاع أعلى نقطة في القوس .

الحل :

نكمل المربع للمعادلة : $س^٢ - ٤س + ١٢ص = ٠$ حيث نجد أن :

$س^٢ - ٤س = - ١٢ص$ (نقلنا ١٢ص للطرف الأيسر بإشارة سالبة)

$س^٢ - ٤س + ٤ = - ١٢ص + ٤$ (أضفنا مربع نصف معامل س للطرفين)

$(س - ٢)^٢ = - ١٢ص + ٤$ (أكملنا المربع في الطرف الأيمن)

$(س - ٢)^٢ = - ١٢(ص - \frac{١}{٣})$ (أخذنا –١٢ عامل مشترك في الطرف الأيسر)

⇐ أن رأس القطع النقطة : $(٢ ، \frac{١}{٣})$

∵ القوس على هيئة قطع مكافئ

∴ بؤرة القطع هي أعلى ارتفاع للقوس وارتفاعها $= \frac{١}{٣}$.

مثال (٤) : أوجد الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $س^٢ + ١٢ ص = ٣٦$

الحل :

ملاحظة وتذكير :
معامل س ، ص = + ١ .

∵ التربيع للسينات ⇐ نوع القطع صادي

الآن : نجعل $س^٢$ في طرف والبقية في الطرف الآخر

⇐ $س^٢ = - ١٢ ص + ٣٦$

⇐ $س^٢ = - ١٢ (ص - ٣)$ (أخذنا عامل مشترك – ١٢)

واضح أن القطع صادي سالب . ٩ = ٣ ، ء = ٠ ، هـ = ٣

∴ إحداثيات الرأس : (٠ ، ٣)

إحداثيات البؤرة : (٠ ، ٠)

معادلة الدليل : ص = ٦

مثال (٤) :

أوجد معادلة القطع مكافئ الذي بؤرته (٣ ، −٤) ، ورأسه (٣ ، −٢) .

الحل :

واضح من نقطتي الرأس والبؤرة أن التغير حاصل الصادات ⇐ نوع القطع صادي

∵ الرأس في الأعلى والبؤرة في الأسفل ⇐ فتحة القطع لأسفل و نوع القطع صادي سالب

∴ المعادلة القياسية للقطع هي : (س − ء)^٢ = − ٤ م (ص − هـ)

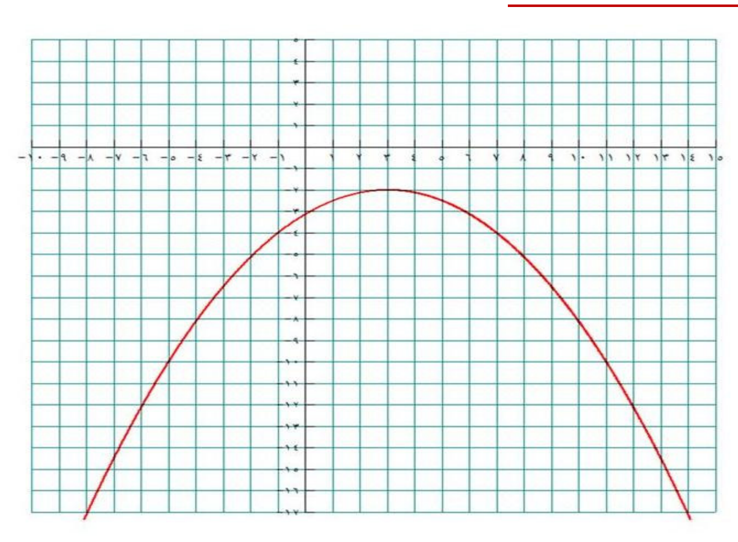
معطى معنا رأس القطع = (٣ ، −٢) ⇐ ء = ٣ ، هـ = −٢ .

من نقطة البؤرة : (٣ ، −٤) ⇐ − م + هـ = −٤

⇐ − م − ٢ = −٤ ⇐ − م = −٢ ⇐ م = ٢

∴ معادلة القطع هي : (س − ٣)^٢ = − ٨ (ص + ٢)

وهذا هو المنحنى :



مثال (٥) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقط :

(٢ ، ١) ، (– ١ ، ٤) ، (– ٣ ، ٢) .

الحل :

ملاحظة : لإيجاد معادلة القطع المكافئ بمعرفة ثلاث نقاط عليه نستخدم المعادلات التالية :

① ص = ؋ س^{٢} + ب س + جـ   عندما المحور // الصادات .

② س = ؋ ص^{٢} + ب ص + جـ   عندما المحور // السينات .

وهي من صور معادلة القطع المكافئ المذكورة في الدرس .

في المسألة المطلوبة : ∵ المحور // السينات نستخدم المعادلة س = ؋ ص^{٢} + ب ص + جـ

ونعوض بالنقط في المعادلة لاستنتاج المجاهيل كالتالي :

(٢ ، ١)   ⇐ ٢ = ؋ + ب + جـ .... (١)

(– ١ ، ٤) ⇐ – ١ = ١٦ ؋ + ٤ب + جـ .... (٢)

(– ٣ ، ٢) ⇐ – ٣ = ٤ ؋ + ٢ب + جـ .... (٣)

بضرب المعادلة (١) × – ١ وجمعها مع المعادلة (٢) نجد أن :

– ٣ = ١٥ ؋ + ٣ ب .... (٤)   وبالقسمة على – ٣ نجد أن :

١ – = ٥ ؋ – ب .... (٥)

وبضرب المعادلة (٣) × – ١ و جمعها مع المعادلة (٢) نجد أن :

٢ = ١٢ ؋ + ٢ب .... (٦)

بضرب المعادلة (٥) × ٢ وجمعها مع المعادلة (٦) نجد أن :

٤ = ٢ ؋ ⇐ ؋ = ٢ ، وبالتعويض عن قيمة ؋ في (٥) نجد أن : ب = – ١١ .

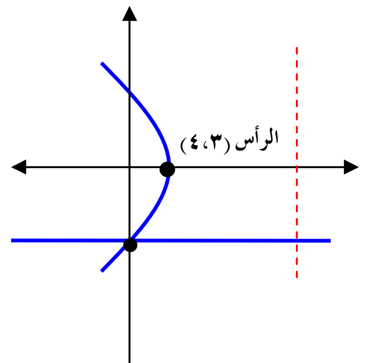
وبالتعويض عن قيم ؋ و ب في المعادلة (١) نجد أن : جـ = ١١

∴ المعادلة المطلوبة هي : س = ٢ ص^{٢} – ١١ ص + ١١ .

ويمكن نكمل المربع للمعادلة المستنتجة لجعلها على الصورة القياسية

مثال (٦) :

أوجد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه (٤ ، ٣) ، والقطع يمر بنقطة الأصل ومحور تناظره يوازي المحور السيني .



الحل :

∵ الرأس (٤ ، ٣) ⇐ **ء = ٤** ، **هـ = ٣**

تلاحظ من الرسم التقريبي للقطع حسب الشروط المعطاة أن القطع سيني سالب .

∴ المعادلة القياسية للقطع هي : (ص – هـ)^٢ = – ٤ م (س – ء)

الآن : نحتاج فقط لقيمة م ؟؟

بالتعويض في المعادلة بنقطة الرأس عن : ء ، هـ ، ونقطة الأصل عن : س ، ص نجد أن :

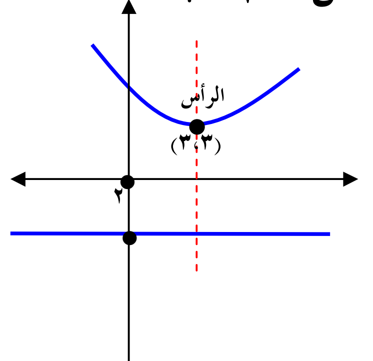
(٠ – ٣)^٢ = – ٤ م (٠ – ٤) ⇐ (– ٣)^٢ = – ٤ م (– ٤)

⇐ ٩ = ١٦ م ⇐ م = ٩/١٦

∴ معادلة القطع هي : (ص – ٣)^٢ = – ٩/٤ (س – ٤)

مثال (٧) :

أوجد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه (٣ ، ٣) ، ومعادلة دليله : ص = ٢ .



الحل :

∵ الرأس (٣ ، ٣) ⇐ **ء = ٣** ، **هـ = ٣**

نلاحظ من الرسم التقريبي للقطع حسب الشروط المعطاة أن القطع صادي موجب .

كذلك ممكن أن نعرف نوع القطع من معادلة الدليل حيث يقطع المحور الصادي ⇐ القطع صادي ولأن الفتحة عكس الدليل نحو البؤرة ⇐ القطع صادي موجب .

∴ المعادلة القياسية للقطع هي : (س − ء)^٢ = ٤ أ (ص − هـ)

الآن : نحتاج فقط لقيمة أ ؟؟

∵ الصورة القياسية لمعادلة الدليل هي : ص = − أ + هـ ⇐ − أ + ٣ = ٢ ⇐ **أ = ١**

∴ معادلة القطع هي : (س − ٣)^٢ = ٤ (ص − ٣)

تطبيقات على الدرس

تطبيق (١) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه : (٢ ، ٣) ، وبؤرته (٢ ، ٧) .

تطبيق (٢) : ضع معادلة القطع المكافئ ص^{٢} – ١٠ ص – ٤ س + ١٣ = صفر ؛ في الصورة القياسية ثم أوجد بؤرته ودليله .

تطبيق (٣) : بين أن المعادلة ص^{٢} – ٤ص – ١٢ س – ٨ = ٠ تمثل قطعاً مكافئاً ثم أوجد :

(١) رأس القطع (٢) البؤرة (٣) معادلة الدليل

تطبيق (٤) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، – ٣) ومعادلة دليله : س = صفر

تطبيق (٥) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (١ ، ٤) و محوره // سـ ويمر بنقطة الأصل .

تطبيق (٦) : إذا كانت المعادلة : ص^{٢} = – ٤ أ (س+أ) تمثل قطعا مكافئا يمر بالنقطة (–٤ ، ٤) ، فأوجد قيمة أ .

تطبيق (٧) : اختر الإجابة الصحيحة (أذكر التعليل) :

المعادلة أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س – ء ص + هـ = ٠ تمثل قطعا مكافئا إذا كانت :

(أ) أ = ٠ ، ب = ٠ (ب) ب = ٠ ، جـ = ٠ (جـ) جـ = ٠ ، ء = ٠ (ء) ء = ٠ ، هـ = ٠

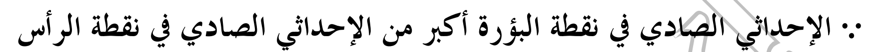
تطبيق (١) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه : (٢ ، ٣) ، وبؤرته (٢ ، ٧) .

الحل :

في هذا السؤال أعطانا صفات وطلب معادلة .

نلاحظ : من نقطتي الرأس والبؤرة أن الإحداثي السيني **ثابت** والصادي **متغير** مما يعني أن القطع صادي



∵ الإحداثي الصادي في نقطة البؤرة أكبر من الإحداثي الصادي في نقطة الرأس

∴ القطع صادي موجب (هذه إحدى طرق الحل الاستنتاجية) .

ويمكن نستنتج ذلك عن طريق الرسم السريع كما في الشكل المقابل .

البؤرة (٢،٧)
الرأس (٢،٣)

المعادلة القياسية لهذا القطع : $(س - ء)^{٢} = ٤ م (ص - هـ)$

∵ إحداثيات الرأس : (ء ، هـ) = (٢ ، ٣)

⇐ ء = ٢ ، هـ = ٣

∵ إحداثيات البؤرة : (ء ، م + هـ) = (٢ ، ٧) ⇐ م + هـ = ٧ م + ٣ = ٧ ⇐ م = ٤

∴ المعادلة المطلوبة : $(س - ٢)^{٢} = ١٦ (ص - ٣)$

تطبيق (٢) :

ضع معادلة القطع المكافئ $ص^{٢} - ١٠ ص - ٤ س + ١٣ = صفر$ ؛ في الصورة القياسية ثم أوجد بؤرته ودليله .

ملاحظة وتذكير :
معامل س ، ص = + ١ .

الحل :

نكمل المربع للمعادلة : $ص^{٢} - ١٠ ص - ٤ س + ١٣ = صفر$ حيث نجد أن :

$ص^{٢} - ١٠ص = ٤س - ١٣$ (نقلنا - ٤ س و + ١٣ للطرف الأيسر مع تغيير الإشارة)

$ص^{٢} - ١٠ص + ٢٥ = ٤س - ١٣ + ٢٥$ (أضفنا مربع نصف معامل س للطرفين = ٢٥)

$(ص - ٥)^{٢} = ٤س + ١٢$ (أكملنا المربع في الطرف الأيمن)

$(ص - ٥)^{٢} = ٤ (س + ٣)$ (أخذنا ٤ عامل مشترك في الطرف الأيسر)

القطع سيني موجب : م = ١ ، ء = - ٣ ، هـ = ٥

∴ رأس القطع النقطة : (- ٣ ، ٥)

∴ بؤرة القطع النقطة : (- ٢ ، ٥)

تطبيقة (٣) : بين أن المعادلة ص^{٢} – ٤ص – ١٢ س – ٨ = ٠ تمثل قطعاً مكافئاً ثم أوجد :

① رأس القطع ② البؤرة ③ معادلة الدليل

الحل :

نكمل المربع للمعادلة : ص^{٢} – ٤ص – ١٢ س – ٨ = ٠ ، حيث نجد أن :

ص^{٢} – ٤ص = ١٢س + ٨ (نقلنا – ١٢ س و – ٨ للطرف الأيسر مع تغيير الإشارة)

ص^{٢} – ٤ ص + ٤ = ١٢س + ٨ + ٤ (أضفنا مربع نصف معامل س للطرفين = ٤)

(ص – ٢)^{٢} = ١٢س + ١٢ (أكملنا المربع في الطرف الأيمن)

(ص – ٢)^{٢} = ١٢ (س + ١) (أخذنا ٤ عامل مشترك في الطرف الأيسر)

القطع سيني موجب : ﻯ = ٣ ، ء = –١ ، هـ = ٢

∴ رأس القطع النقطة : (ء ، هـ) = (– ١ ، ٢)

∴ بؤرة القطع النقطة : (ﻯ + ء ، هـ) = (٢ ، ٢)

تطبيقة (٤) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، – ٣) ومعادلة دليله : س = صفر

الحل :

في هذا السؤال أعطانا صفات وطلب معادلة .

نلاحظ : من تمثيل نقطة الرأس ومعادلة الدليل في المستوى الإحداثي نلاحظ أن القطع سيني موجب . **لماذا ؟**

عندنا معلومة تقول فتحة القطع دائماً عكس الدليل تتجه إلى البؤرة .

المعادلة القياسية لهذا القطع : (ص – هـ)^{٢} = ٤ ﻯ (س – ء)

∵ إحداثيات الرأس : (ء ، هـ) = (٢ ، – ٣)

⇐ ء = ٢ ، هـ = – ٣

∵ معادلة الدليل : س = – ﻯ + ء ⇐ – ﻯ + ٢ = ٠ ⇐ – ﻯ = – ٢ ⇐ ﻯ = ٢

∴ المعادلة المطلوبة : (ص + ٣)^{٢} = ٨ (س – ٢)

تطبيق (٥) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (١ ، ٤) و محوره // سـ ويمر بنقطة الأصل .

الحل :

∵ المحور // سـ ⇐ نوع القطع سيني .

بقي أن نحدد فتحة القطع ؟ هل إلى اليمين (سـ$^{+}$) أم إلى اليسار (سـ$^{-}$) ؟

واضح من الرسم أن الفتحة نحو : (سـ$^{-}$)

لأن : الرأس في الربع الأول ويمر القطع بنقطة الأصل فلابد أن تكون الفتحة نحو اليسار مستحيل أن تكون نحو اليمين وإلا فلن يكون قطعاً مكافئاً .

المعادلة القياسية لهذا القطع : (ص − هـ)^{٢} = − ٤ م (س − ء)

∵ إحداثيات الرأس : (ء ، هـ) = (١ ، ٤) ⇐ ء = ١ ، هـ = ٤

بقي أن نحدد قيمة م ؟ كيف ذلك ؟ نرجع لقراءة السؤال :

نجد أن القطع يمر بالنقطة (٠ ، ٠) ⇐ النقطة تحقق معادلة القطع القياسية فنعوض فيها .

عندما : س = ٠ ، ص = ٠ ، ء = ١ ، هـ = ٤ نجد أن :

(٠ − ٤)^{٢} = − ٤ م (٠ − ١) ⇐ ١٦ = − ٤ م × − ١ ⇐ ١٦ = ٤ م ⇐ م = ٤

∴ المعادلة المطلوبة : (ص − ٤)^{٢} = − ١٦ (س − ١)

تطبيق (٦) : إذا كانت المعادلة : ص^{٢} = − ٤ م (س + م) تمثل قطعاً مكافئاً يمر بالنقطة (−٤ ، ٤) ، فأوجد قيمة م .

الحل :

∵ القطع يمر بالنقطة (− ٤ ، ٤) ⇐ النقطة تحقق معادلة القطع فنعوض بقيم : س ، ص في المعادلة .

نجد أن : (٤)^{٢} = − ٤ م (− ٤ + م) (عوضنا : عندما : س = − ٤ ، ص = ٤)

⇐ ١٦ = ١٦ م − ٤ م^{٢} (ربعنا في الطرف الأيمن و ضربنا داخل القوس في الأيسر)

⇐ ٤ م^{٢} − ١٦ م + ١٦ = ٠ (نقلنا كل قيم الطرف الأيسر إلى الأيمن مع تغيير الإشارة)

⇐ م^{٢} − ٤ م + ٤ = ٠ (قسمنا جميع الأطراف على : ٤)

⇐ (م − ٢) (م − ٢) = ٠ (حللنا المعادلة إلى عاملين)

⇐ م = ٢ وهو المطلوب

تطبيق (٧) : اختر الإجابة الصحيحة (أذكر التعليل) :

المعادلة ٩ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س − ء ص + هـ = ٠ تمثل قطعا مكافئا إذا كانت :

(٩) ٩ = ٠ ، ب = ٠ (ب) ب = ٠ ، جـ = ٠ (جـ) جـ = ٠ ، ء = ٠ (ء) ء = ٠ ، هـ = ٠

الحل :

نستقري الاختيارات ونبحث عن الإجابة :

الاختيار الأول : (٩) ٩ = ٠ ، ب = ٠

غير صحيح لأننا لو عوضنا لن تكون المعادلة معادلة من الدرجة الثانية وبالتالي لن تكون معادلة قطع مكافئ

الاختيار الثالث : (جـ) جـ = ٠ ، ء = ٠

غير صحيح لأن المعادلة ستكون من الدرجة الثانية لكلا المجهولين وهي تختلف عن معادلة القطع المكافئ .

الاختيار الرابع : (ء) ء = ٠ ، هـ = ٠

أيضاً نفس التعليل في الاختيار الثالث .

الحالة الأخيرة وهو الصحيح : الاختيار الثاني : (ب) ب = ٠ ، جـ = ٠

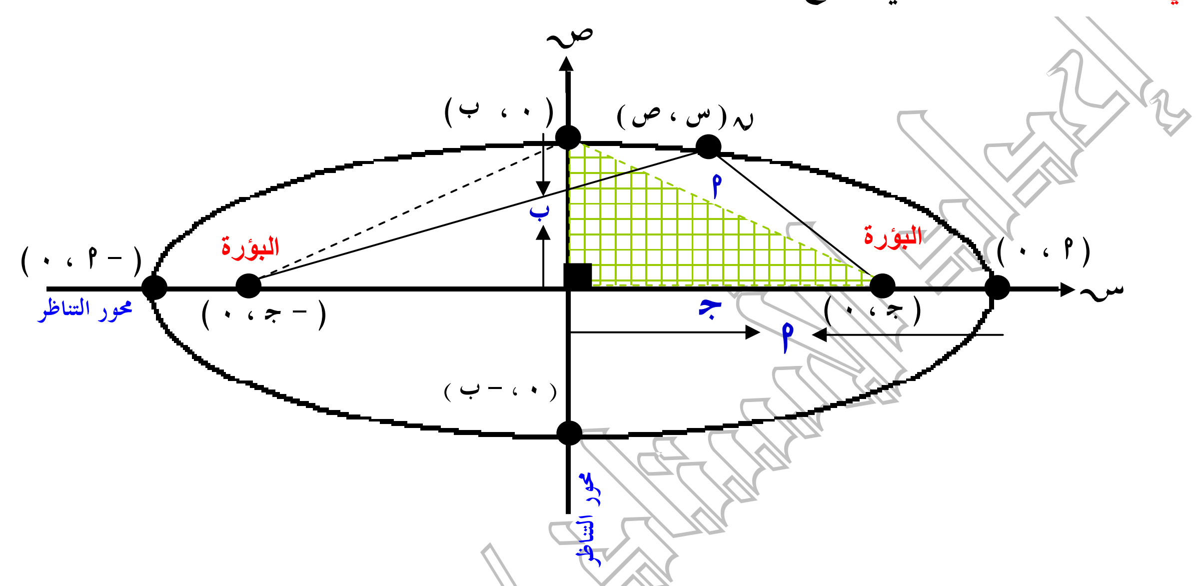
وفي هذه الحالة ستكون معادلة قطع مكافئ صادي حيث سيكون التربيع للسين بينما صاد من الدرجة الأولى .

ثانياً : القطع الناقص / إهليلج (ellipse) :

تعريف :

هو مسار نقطة تتحرك في المستوي بحيث يبقى مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي مقداراً ثابتاً دائماً

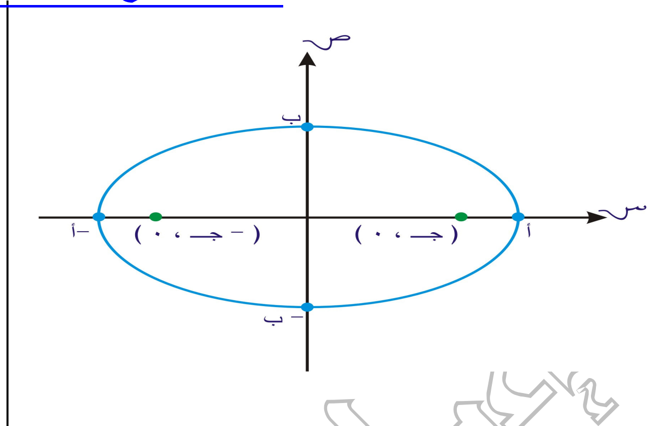
نسمي النقطتين الثابتتين بؤرتي القطع الناقص ، المقدار الثابت = ٢م



أهم الصفات للقطع الناقص :

1. النقطتان الثابتتان نسميهما بؤرتي القطع الناقص .
2. المسافة بين البؤرتين يسمى البعد البؤري = ٢ ج .
3. طول المحور الأكبر للقطع الناقص = ٢ م .
4. المحور الأكبر يمر بالبؤرتين والمركز .
5. طول المحور الأصغر للقطع الناقص = ٢ ب .
6. في القطع الناقص دائماً : ج^2 = م^2 – ب^2 ، و م > ج ، م > ب .
7. مركز القطع يقع في منتصف كلاً من المحورين .
8. أي نقطة على القطع يكون مجموع بعديها عن بؤرتي القطع الناقص = ٢م .
9. في معادلة القطع الناقص م^2 العدد الأكبر ، و ب^2 العدد الأصغر .

حالات القطع الناقص إذا كان الرأس نقطة الأصل



الحالة الأولى :

الصفات :

المركز : (٠ ، ٠)

البؤرتان :

ب$_1$ = (ج ، ٠) " البؤرة اليمنى "

ب$_2$ = (– ج ، ٠) " البؤرة اليسرى "

البعد البؤري = ٢ج

رؤوس القطع :

نهايتي محوره الأكبر (± أ ، ٠) أو رأسي القطع .

نهايتي محوره الأصغر (٠ ، ± ب)

محوره الأكبر (البؤري) منطبق على س ،

وطوله = ٢أ ، ومعادلته ص = ٠

محوره الأصغر (غير البؤري) منطبق على ص ،

وطوله = ٢ب ، ومعادلته س = ٠

معادلة القطع :

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

العلاقة بين أ ، ب ، ج هي : أ^2 = ب^2 + ج^2

الحالة الثانية :

الصفات : المركز : (٠ ، ٠)

البؤرتان :

ب$_1$ = (٠ ، ج) " البؤرة في الأعلى "

ب$_2$ = (٠ ، – ج) " البؤرة في الأسفل "

البعد البؤري = ٢ج

رؤوس القطع :

نهايتي محوره الأكبر (٠ ، ± أ) أو رأسي القطع .

نهايتي محوره الأصغر (± ب ، ٠)

محوره الأكبر (البؤري) منطبق على ص ،

وطوله = ٢أ ، ومعادلته : س = ٠

محوره الأصغر (غير البؤري) منطبق على س ،

وطوله = ٢ب ، ومعادلته : ص = ٠

معادلة القطع :

$$\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

العلاقة بين أ ، ب ، ج هي : أ^2 = ب^2 + ج^2

لاتنسى عند حل المسائل :

(١) الطرف الأيمن للمعادلة دائماً موجب واحد .

(٢) معامل $س^2$ و $ص^2$ دائماً موجب واحد .

(٣) دائماً : أ > ب ، أ > جـ .

(٤) دائماً المقام الأكبر يحدد نوع القطع هل هو سيني أم صادي ، و $أ^2$ = المقام الأكبر .

(٥) دائماً : أ ، ب ، جـ قيم موجبة لأنها أطوال .

(٦) أيضاً دائماً : أ : تتعلق بالمحور الأكبر ، ب : المحور الأصغر ، جـ : البؤرة .

(٧) أهم جزء في القطع الناقص هو المحور الأكبر لأنه تقع عليه البؤرتان ويمر بالرأس .

ملاحظات مهمة تحتاجها في حل الأمثلة :

(١) أي نقطة على القطع يكون مجموع بعديها عن بؤرتي القطع الناقص = ٢أ .

(٢) محيط المثلث المكون من النقطة ن وبؤرتي القطع = ٢أ + ٢ب .

(٣) أقرب نقطة على القطع لبؤرة القطع تكون نهاية المحور الأكبر المجاور ويكون البعد = أ − جـ .

(٤) أبعد نقطة على القطع لبؤرة القطع تكون نهاية المحور الأكبر البعيد ويكون البعد = أ + جـ .

(٥) منتصف قطعة مستقيمة = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

(٦) إذا كان أ = ب فإن القطع الناقص يصبح دائرة مركزها (٠ ، ٠) و نق = أ = ب .

(٧) في معادلة القطع الناقص $أ^2$ العدد الأكبر ، و $ب^2$ العدد الأصغر .

مثال (١) : استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته : $٢٥ س^٢ + ٩ ص^٢ = ٢٢٥$

الحل :

في حل مسائل القطع الناقص ننظر للطرف الأيسر يجب أن يكون موجب واحد .

تلاحظ عند النظر في المعادلة أن الطرف الأيسر ليس موجب واحد فنقسم جميع الأطراف على : ٢٢٥

نجد أن : $\frac{٢٥}{٢٢٥} س^٢ + \frac{٩}{٢٢٥} ص^٢ = ١$ (نختصر بين البسط والمقام نجد أن :)

$\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ (نلاحظ أن المقام الأكبر بسطه هو : ص)

∴ نوع القطع صادي : $م^٢ = ٢٥ \Leftarrow م = ٥$ ، $ب^٢ = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

∵ $م^٢ = ب^٢ + ج^٢ \Leftarrow ٢٥ = ٩ + ج^٢ \Leftarrow ج^٢ = ١٦ \Leftarrow ج = ٤$

الصفات :

المركز : (٠ ، ٠)

البؤرتان :

$ب_١$ = (٠ ، ج) = (٠ ، ٤) " البؤرة في الأعلى "

$ب_٢$ = (٠ ، − ج) = (٠ ، − ٤) " البؤرة في الأسفل "

البعد البؤري = ٢ ج = ٨

رؤوس القطع :

نهايتي محوره الأكبر (٠ ، ± م) = (٠ ± ٥)

نهايتي محوره الأصغر (± ب ، ٠) = (± ٣ ، ٠)

محوره الأكبر (البؤري) منطبق على ص ، وطوله = ٢م = ١٠ وحدات ، ومعادلته : س = ٠

محوره الأصغر(غير البؤري) منطبق على س ، وطوله = ٢ ب = ٦ وحدات ، ومعادلته : ص = ٠

مثال (٢) أوجد معادلة القطع الناقص الذي طولا محوريه ٦ ، ١٠ وحدات ، ومركزه (٠ ، ٠) ومحـــوره الأكـــبر منطبق على محور سـ .

الحل :

∵ المحور الأكبر منطبق على سـ ⇐ نوع القطع سيني ، ومعادلته القياسية : $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

∵ طولا محوريه ٦ ، ١٠ ⇐ طول المحور الأكبر = ١٠ ⇐ ٢أ = ١٠ ⇐ أ = ٥

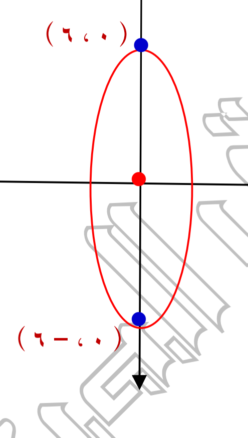
⇐ طول المحور الأصغر = ٦ ⇐ ٢ب = ٦ ⇐ ب = ٣

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{س^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{٩} = ١$

مثال (٣) أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٠ ، ± ٦) وطول محوره الأصغر = ٤ .

الحل :

تذكر : إذا ذكر رأسا القطع فالمراد نهايتا محوره الأكبر .



الآن : معطى أن : رأسا القطع (٠ ± ٥) ، ونستنتج الآتي :

- أن القطع صادي لأن الرأسين يقعان على المحور الصادي (من الرسم)
- أن قيمة : أ = ٦ ، لأن نهايتي محوره الأكبر : (٠ ، ± ٦) .

∵ وطول محوره الأصغر = ٤ ⇐ ٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{ص^2}{٣٦} + \frac{س^2}{٤} = ١$

مثال (٣) استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته : ٩ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١

الحل :

من الخطأ هنا قسمة الحدود على ٣٦ لأن شرط القطع الناقص أن يكون الطرف الأيسر = ١ ، بينما عند القسمة على ٣٦ سيكون الطرف الأيسر = $\frac{١}{٣٦}$.

كيف الطريقة لمثل هذه المسائل ؟

نتذكر خصائص الكسور كالتالي :

$$\frac{س}{\frac{١}{٩}} = س \div \frac{١}{٩} = س \times \frac{٩}{١} = ٩س$$

∴ تصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{ص^{٢}}{\frac{١}{٤}} + \frac{س^{٢}}{\frac{١}{٩}} = ١$$

نلاحظ : مقام الصادات أكبر من مقام السينات .

∴ المعادلة تمثل قطع ناقص صادي مركزه نقطة الأصل فيه :

$$أ = \frac{١}{٢} \, , \, ب = \frac{١}{٣} \, , \, جـ = \frac{\sqrt{٥}}{٦}$$

الصفات :

المركز : (٠ ، ٠)

البؤرتان : $\left(٠ \, , \, \pm\frac{\sqrt{٥}}{٦} \right)$ ، البعد البؤري = ٢ جـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

رؤوس القطع :

نهايتي محوره الأكبر (٠ ، ± أ) = $\left(٠ \, , \, \pm\frac{١}{٢} \right)$

نهايتي محوره الأصغر (± ب ، ٠) = $\left(٠ \, , \, \pm\frac{١}{٣} \right)$

محوره الأكبر (البؤري) منطبق على ص ، وطوله = ٢أ = ١ وحدات ، ومعادلته : س = ٠

محوره الأصغر(غير البؤري) منطبق على س ، وطوله = ٢ب = $\frac{٢}{٣}$ وحدات ، ومعادلته : ص = ٠

تطبيقات على الدرس

تطبيق (١) : استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته : $٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١٤٤$.

تطبيق (٢) : استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته : $١٦ س^{٢} + ٢٥ ص^{٢} = ٣٦$.

تطبيق (٣) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (٠ ، ٠) وإحدى بؤرتيه هي : (٠ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي ١٠ وحدات .

تطبيق (٤) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠ ، ٠) وإحدى بؤرتيه هي : (٠ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي $٢\sqrt{١٠}$ وحدة .

تابع تطبيقات على درس القطع الناقص

تطبيق (٥) : استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته : $\frac{1}{2}$ س^2 + $\frac{1}{8}$ ص^2 = $\frac{1}{4}$

تطبيق (٦) : استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته : س^2 + ٤ ص^2 = ١ .

تطبيق (٧) : استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته : ص^2 = ١ − ٢ س^2 .

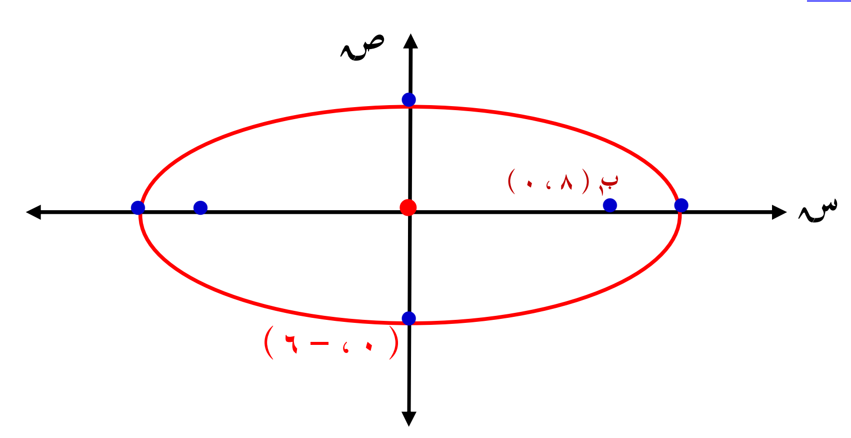
تطبيق (٨) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (٠ ، ٠) و نهايتا محوره الأكبر : (± ١٠ ، ٠) . وبعده البؤري = ٦ وحدات .

تطبيق (٩) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠ ، ٠) ونهايتا محوره الأصغر : (± ٤ ، ٠) وطول محوره الأكبر يساوي ١٦ وحدة .

تطبيق (١٠) : هل المعادلة التالية تمثل معادلة قطع ناقص : $\frac{\text{س}^2}{\text{هـ}} + \frac{\text{ص}^2}{\text{هـ} + 4} = 1$

حيث أن : هـ > ٠ ، ثم أثبت أن جميع القطوع التي تمثل بنفس المعادلة لها نفس البؤرة مهما كانت : هـ > ٠ ، ثم أوجد إحداثياتها وحدد نوع القطع .

تطبيق (١١) : من الرسم المعطى أمامك لقطع الناقص حدد معادلة وصفات القطع :



تطبيقات على درس القطع الناقص

١ النقطة ن (س ، ص) تقع على القطع الناقص الذي معادلته : $\frac{س^2}{٤٩} + \frac{ص^2}{١٣} = ١$ ، حيث : $ب_١$ ، $ب_٢$ هما بؤرتا القطع فأوجد :

① البؤرتان : $ب_١$ ، ب .

② $| ن ب_١ | + | ن ب_٢ |$.

③ محيط المثلث : $ن ب_١ ب_٢$.

④ إذا كانت ل نقطة على القطع فأوجد أقصر بعد بينها وبين $ب_١$ ، وكذلك أوجد أكبر بعد بينها وبين $ب_٢$

⑤ إذا كانت م نقطة على القطع وكان بعدها عن $ب_١$ = ٩ وحدات ، فأوجد بعدها عن $ب_٢$.

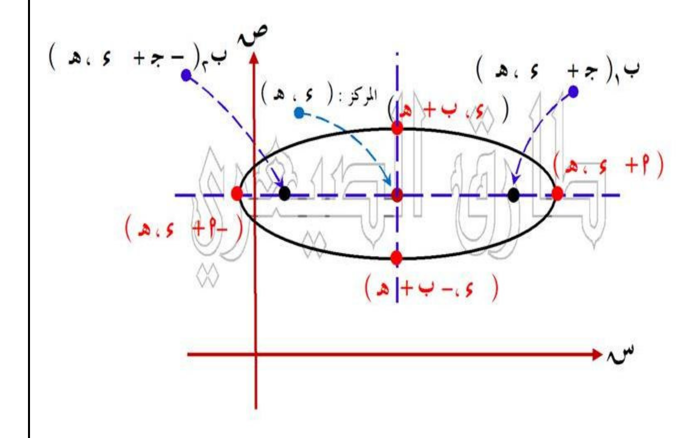
٢ تتحرك نقطة م (س ، ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين : س = ٢جــاهـ ، ص = ٣ جــتاهـ ، أوجد معادلة المسار للنقطة وما نوع المنحنى ، حيث : هـ قياس زاوية حادة ؟

٣ بني جسر مقوس على شكل نصف قطع ناقص محوره الأكبر أفقي ، فإذا كان طول قاعدة الجسر ٣٠ م ، وأعلى نقطة فيه فوق الطريق الأفقية ١٠ م ، فما هو ارتفاع الجسر على بعد ٦م من مركز القاعدة .

٤ قطع مكافئ معادلته : $ص^2 = ١٦س$ ، أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ ورأسه رأس القطع المكافئ ، وطرفي محوره الأصغر : (٠ ، ± ٣) .

٥ أ ب جـ مثلث محيطه ٢٠ سم وإحداثيات : أ (١ ، ٤) ، ب (١ ، ١٢) ، النقطة جـ تتحرك في المستوى الديكارتي . أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة جـ .

حالات القطع الناقص إذا كان الرأس : (ء ، هـ)



الصفات :

المركز : (ء ، هـ)

البؤرتان :

ب١ = (جـ + ء ، هـ) " البؤرة اليمنى "

ب٢ = (−جـ + ء ، هـ) " البؤرة اليسرى "

البعد البؤري = ٢ جـ

رؤوس القطع :

نهايتي محوره الأكبر

(٩ + ء ، هـ) ، (−٩ + ء ، هـ)

المحور الأكبر (البؤري) // س ،

وطوله = ٢٩ ، ومعادلته : ص = هـ

نهايتي محوره الأصغر

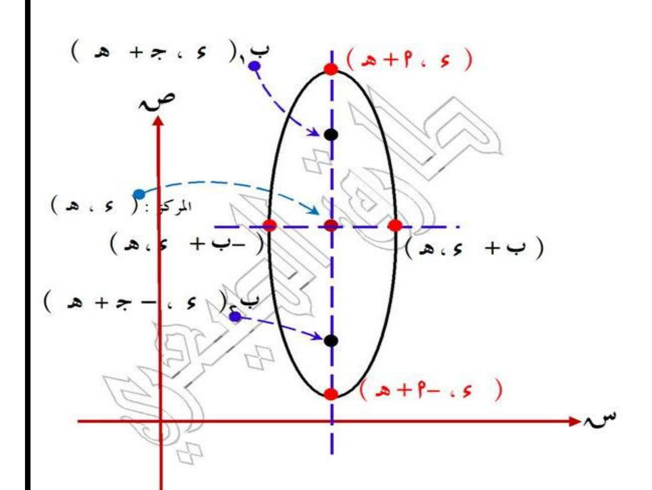
(ء ، ب + هـ) ، (ء ، −ب + هـ)

المحور الأصغر (غير البؤري) // ص ،

وطوله = ٢ب ، ومعادلته : س = ء

معادلة القطع :

$$\frac{(س - ء)^2}{٩^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$$



الصفات :

المركز : (ء ، هـ)

البؤرتان :

ب١ = (ء ، جـ + هـ) " البؤرة العليا "

ب٢ = (ء ، −جـ + هـ) " البؤرة السفلى "

البعد البؤري = ٢ جـ

رؤوس القطع :

نهايتي محوره الأكبر

(ء ، ٩ + هـ) ، (ء ، −٩ + هـ)

نهايتي محوره الأصغر

(ب + ء ، هـ) ، (−ب + ء ، هـ)

المحور الأكبر (البؤري) // ص ،

وطوله = ٢٩ ، ومعادلته : س = ء

المحور الأصغر (غير البؤري) // س ،

وطوله = ٢ب ، ومعادلته : ص = ء

معادلة القطع :

$$\frac{(ص - هـ)^2}{٩^2} + \frac{(س - ء)^2}{ب^2} = ١$$

مثال (١) : ضع المعادلة : ٤ (س − ١)^{٢} + ٩ (ص + ٣)^{٢} = ١٤٤ ، في الصورة القياسية ثم استنتج صفات القطع الناقص .

الحل :

لننسى أن : الصورة القياسية للقطع الناقص في الطرف الأيسر = (+ ١)

∴ نقسم الطرفين على : ١٤٤

⇐ $\frac{(س - ١)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص + ٣)^{٢}}{١٦} = ١$ (بالقسمة على : ١٤٤ والاختصار بين البسط والمقام)

المقام للسينات ∴ نوع القطع سيني و أ^{٢} = ٣٦ ⇐ أ = ٦ ، ب^{٢} = ١٦ ⇐ ب = ٤

لإيجاد ج نستخدم العلاقة : ج^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ⇐ ج^{٢} = ٣٦ − ١٦ ⇐ ج^{٢} = ٢٠ ⇐ ج = ٢$\sqrt{٥}$

الآن نوجد الصفات :

المركز : (د ، هـ) = (١ ، −٣)

البؤرتان :

ب$_{١}$ = (ج + د ، هـ) = (١ + ٢$\sqrt{٥}$ ، − ٣) " البؤرة اليمنى "

ب$_{٢}$ = (−ج + د ، هـ) = " البؤرة اليسرى " البعد البؤري = ٢ ج = ٤$\sqrt{٥}$

رؤوس القطع :

محوره الأكبر // س

(أ + د ، هـ) = (٧ ، − ٣) ، (− أ + د ، هـ) = (− ٥ ، − ٣)

وطوله = ٢أ = ١٢ ، ومعادلته : ص = هـ ⇐ ص = − ٣

محوره الأصغر // ص

(د ، ب + هـ) = (١ ، ١) ، (د ، − ب + هـ) = (١ ، − ٧)

وطوله = ٢ ب = ٨ ، ومعادلته : س = د ⇐ س = ١

مثال (٢)

استنتج صفات القطع الناقص الذي معادلته س^{٢} + ٢ص^{٢} − ٢س + ١٢ ص − ١٧ = ٠

الحل :

س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٢س + ١٢ ص − ١٧ = ٠ (نرتب المعادلة بتجميع المجاهيل المتشابهة مع بعضها)

س^{٢} − ٢س + ٢ ص^{٢} + ١٢ ص = ١٧ (ننقل الحد الثابت فقط للطرف الآخر)

(س^{٢} − ٢س) + ٢ (ص^{٢} + ٦ ص) = ١٧ (جعلنا معامل س^{٢} و ص^{٢} (+ ١) بأخذ عامل مشترك)

(س^{٢} − ٢س + ١) + ٢ (ص^{٢} + ٦ ص + ٩) = ١٧+ ١+ ١٨

(أضفنا مربع نصف معامل س و ص للطرف الأيمن وكذلك الأيسر ولكن بعد ضربه في العامل المشترك)

(س − ١)^{٢} + ٢ (ص + ٣)^{٢} = ٣٦ بالقسمة على ٣٦ نجد أن :

$$\frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{٣٦} + \frac{(\text{ص} + ٣)^{٢}}{١٨} = ١$$

⇐ معادلة قطع ناقص المحور الأكبر يوازي المحور السيني .

⇐ ﺃ = ٦ ، ب = ٣ $\sqrt{٢}$ ، جـ = ٣ $\sqrt{٢}$ ، ء = ١ ، هـ = − ٣

∵ وجدنا المجاهيل الخمس نستطيع إيجاد جميع الصفات كالمثال السابق فنتركه للطالب كتدريب .

مثال (٣) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه : (−١ ، ١) ، ومحوره الأصغر // سـ ، وطول محوره الأكبر ٤ وحدات والبعد البؤري ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة .

الحل :

∵ المحور الأصغر // سـ ⇐ نوع القطع صادي لأن المحور الأكبر // ص

المعادلة القياسية للقطع : $\frac{(ص - \quad)^٢}{أ^٢} + \frac{(س - ء)^٢}{ب^٢} = ١$

نحتاج إلى قيم : أ ، ب ، ء ، هـ

نرجع لقراءة السؤال فنجد أن : مركز القطع : (−١ ، ١) ⇐ ء = −١ ، هـ = ١

كذلك نجد أن : وطول محوره الأكبر ٤ وحدات ⇐ ٢أ = ٤ ⇐ أ = ٢

وأيضاً نجد أن البعد البؤري ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة ⇐ ٢جـ = ٢ $\sqrt{٢}$ ⇐ جـ = $\sqrt{٢}$

ولكن نحتاج لقيمة ب فلاننسى العلاقة : أ٢ = ب٢ + جـ٢ ⇐ ٤ = ب٢ + ٢ ⇐ ب٢ = ٢

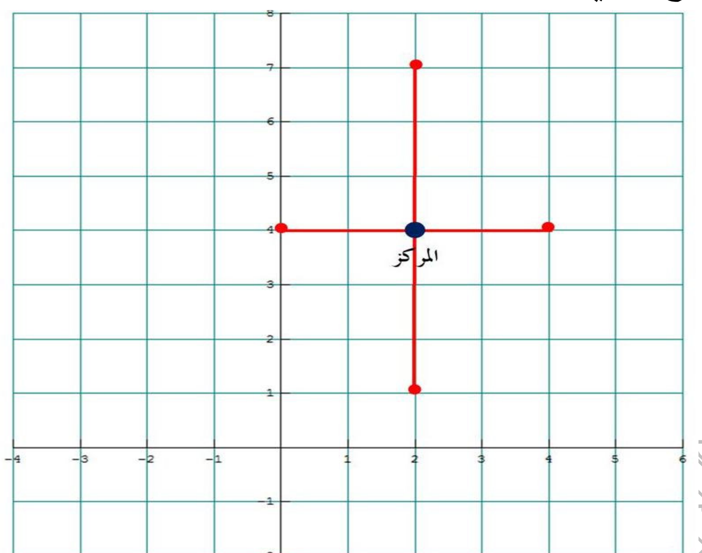
∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{(ص - ١)^٢}{٤} + \frac{(س + ١)^٢}{٢} = ١$

مثال (٤) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقاط :

(٢ ، ١) ، (٤ ، ٤) ، (٢ ، ٧) ، (٠ ، ٤) .

الحل :

نمثل النقاط في المستوى الإحداثي سوف نستنتج الآتي :



١ نوع القطع صادي لأن المسافة بين النقطتين : (٢ ، ١) و (٢ ، ٧) أكبر من المسافة بين النقطتين : (٠ ، ٤) و (٤ ، ٤) وهذا يعني أن المحور الأكبر يوازي محور الصادات والمحور الأصغر يوازي محور السينات .

والمعادلة القياسية ستكون : $\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - ى)^2}{ب^2} = ١$ ، نحتاج إلى قيم : أ ، ب ، جـ ، ى

٢ المسافة بين النقطتين : (٢ ، ١) و (٢ ، ٧) = ٦ وحدات ⇐ ٢أ = ٦ ⇐ **أ = ٣**

المسافة بين النقطتين : (٠ ، ٤) و (٤ ، ٤) = ٤ وحدات ⇐ ٢ب = ٤ ⇐ **ب = ٢** .

٣ مركز القطع : (ى ، هـ) يقع في منتصف المسافة بين المحورين عند النقطة : (٢ ، ٤)

⇐ **ى = ٢ ، هـ = ٤** .

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(ص - ٤)^2}{٩} + \frac{(س - ٢)^2}{٤} = ١$

مثال (٥) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي نهايتا محوره الأصغر : (٢ ، ١) ، (٢ ، −٧) والبعد بين بؤرتيه = ٦ وحدات .

الحل :

لاحظ في إحداثيات المحور الأصغر : السينات ثابتة والصادات متغيرة هذا يعني أن المحور الأصغر // ص

∴ المحور الأكبر // س ⇐ نوع القطع سيني

المعادلة القياسية للقطع : $\frac{(س - ء)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$

نحتاج إلى قيم : أ ، ب ، ء ، هـ

الصورة القياسية لنهايتي المحور الأصغر : (ء ، ب + هـ) ، (ء ، − ب + هـ)

∴ من المعطيات نجد أن : ء = ٢ ، هـ = −٣ ، ب = ٤

∵ البعد البؤري = ٤ وحدات ⇐ ٢جـ = ٦ ⇐ جـ = ٣

من العلاقة بين : أ ، ب ، جـ نجد أن : أ = ٥

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{(س - ٢)^٢}{٢٥} + \frac{(ص + ٣)^٢}{١٦} = ١$

مثال (٦) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه : (٥ ، ٢) ، (٥ ، −٤)
وطول محوره الأصغر = ٨ وحدات .

الحل :

لاحظ في إحداثيات البؤرتين : السينات ثابتة والصادات متغيرة هذا يعني أن المحور البؤري // ص

∴ المحور الأكبر // ص ⇐ نوع القطع صادي

المعادلة القياسية للقطع : $\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - ى)^2}{ب^2} = ١$

نحتاج إلى قيم : أ ، ب ، ى ، هـ

الصورة القياسية لإحداثيات البؤرتين : (ى ، جـ + هـ) ، (ى ، − جـ + هـ)

∴ من المعطيات نجد أن : ى = ٥ ، هـ = −١ ، جـ = ٣

∵ طول المحور الأصغر = ٨ وحدات ⇐ ٢ب = ٨ ⇐ ب = ٤

من العلاقة بين : أ ، ب ، جـ نجد أن : أ = ٥

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{(ص + ١)^2}{٢٥} + \frac{(س - ٥)^2}{١٦} = ١$

مثال (٧) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه : (٢ ، ٥) ، (−٤ ، ٥)
وطول محوره الأصغر = ٨ وحدات .

الحل :

لاحظ في إحداثيات البؤرتين : الصادات ثابتة والسينات متغيرة هذا يعني أن المحور البؤري // سـ

∴ المحور الأكبر // سـ ⇐ نوع القطع سيني

المعادلة القياسية للقطع : $\frac{(س - ى)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$

نحتاج إلى قيم : م ، ب ، ى ، هـ

الصورة القياسية لإحداثيات البؤرتين : (جـ + ى ، هـ) ، (− جـ + ى ، هـ)

∴ من المعطيات نجد أن : **ى = −١** ، **هـ = ٥** ، **جـ = ٣**

∵ طول المحور الأصغر = ٨ وحدات ⇐ ٢ب = ٨ ⇐ **ب = ٤**

من العلاقة بين : م ، ب ، جـ نجد أن : **م = ٥**

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{(س + ١)^2}{٢٥} + \frac{(ص - ٥)^2}{١٦} = ١$

مثال (٨) : المعادلتان : س = جـا هـ ، ص = ٧ جتا هـ ، تحددان موقع جسم على منحنى في اللحظة هـ ، اكتب معادلة المنحنى الذي يتحرك على الجسم باستخدام المتغير : س ، ص ثم عين نوع المنحنى الذي يتحرك عليه الجسم وعناصره الأساسية .

الحل :

بتربيع المعادلتين نجد أن :

س^٢^ = جـا^٢^هـ ....(١) ، ص^٢^ = ٤٩ جتا^٢^هـ ⇐ $\frac{ص^٢}{٤٩}$ = جتا^٢^هـ ....(٢)

بجمع المعادلتين : (١) + (٢) نجد أن : $\frac{ص^٢}{٤٩} + \frac{س^٢}{١}$ = جـا^٢^هـ + جتا^٢^هـ

ولكن : جـا^٢^هـ + جتا^٢^هـ = ١

∴ ستصبح المعادلة : $\frac{ص^٢}{٤٩} + \frac{س^٢}{١} = ١$

وهي معادلة قطع ناقص صادي مركزه نقطة الأصل فيه : ٩ = ٧ ، ب = ١ ، جـ = ٤√٣

الصفات :

المركز : (٠ ، ٠)

البؤرتان : (٠ , ±٤√٣) ، البعد البؤري = ٢ جـ = ٨√٣

رؤوس القطع :

نهايتي محوره الأكبر (٠ ، ± ٩) = (٠ , ±٧) وطوله = ٢٩ = ١٤ وحدة ، ومعادلته : س = ٠

نهايتي محوره الأصغر (± ب ، ٠) = (٠ , ±١) وطوله = ٢ب = وحدتان ، ومعادلته : ص = ٠

تطبيقات على الدرس

تطبيق (١) ضع معادلة القطع الناقص : ٤س^{٢} + ٩ ص^{٢} – ٨ س – ٣٦ ص + ٤ = ٠ ، في الصورة القياسية ثم أوجد مركزه وبؤرتيه .

تطبيق (٢) : أثبت أن المعادلة : ٩ س^{٢} + ٤ ص^{٢} – ٥٤ س +١٦ ص + ٦١ = صفر ، تمثل قطعاً ناقصاً ، ثم حدد صفاته .

تطبيق (٣) قطع ناقص بؤرتاه (٣ ، –٢) ، (٣ ،٦) وطول محوره الأكبر ١٠ وحدات ، أوجد :

① مركز القطع ② معادلة القطع ③ نهايتي المحور الأكبر

تطبيق (٤) : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه : (٢ ، – ١) وإحدى نهايتي محوره الأكبر (٥ ، – ١) وإحدى نهايتي محوره الأصغر : (٢ ، – ٣) .

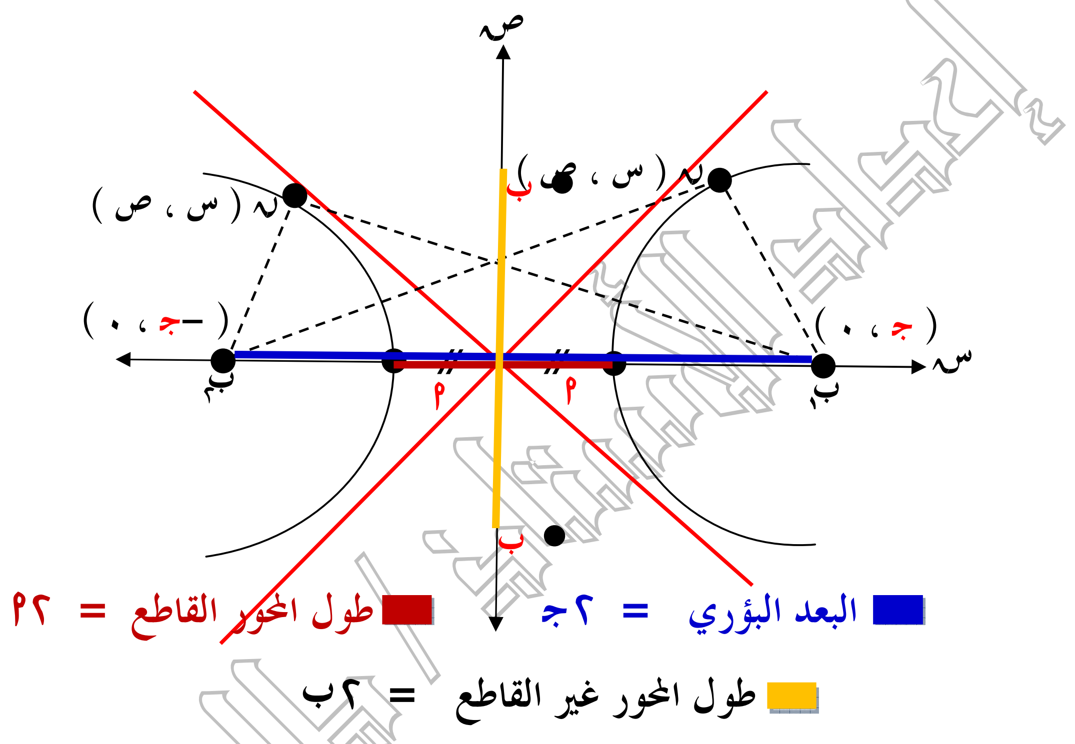
تطبيق (٥) : أوجد معادلة مسار نقطة تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين : (٣ ، ٤) ، (٣ ، – ٤) يساوي ١٠ وحدات .

ثالثاً : القطع الزائد / هُذْلُول (hyperbola) :

تعريف :

هو مسار نقطة تتحرك في المستوي بحيث يبقى الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي مقداراً ثابتاً دائماً .

نسمي النقطتين الثابتتين : بؤرتي القطع الزائد ، المقدار الثابت = ٢م .



ملاحظات :

① لأي نقطة على منحنى القطع الزائد فإن : | ن ب | – | ن ب | = ٢م

① طول المحور القاطع = ٢ م .

② طول المحور المرافق (أو المحور غير القاطع) = ٢ ب .

③ البعد البؤري = | ب ب | = ٢جـ .

④ **تذكر أن :** أهم جزء في القطع الزائد هو المحور القاطع لأنه يمر بالبؤرتين .

⑤ مركز القطع يقع في منتصف كلاً من الرأسين والبؤرتين .

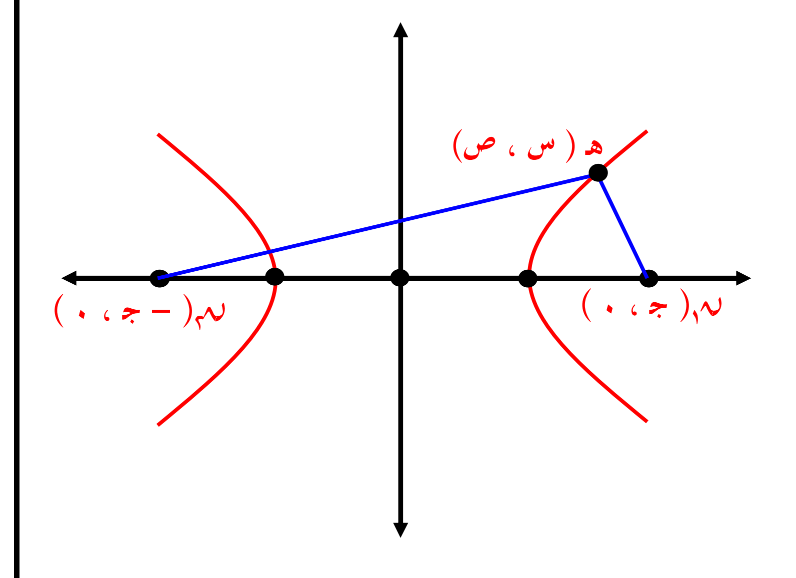
⑥ دائماً : جـ > م ، جـ > ب . (خلاف القطع الناقص)

⑦ **تذكر أن :** العلاقة التي تربط بين : م ، ب ، جـ ، وهي : جـ^{2} = م^{2} + ب^{2} .

⑧ دائماً في القطع الزائد م^{2} تأتي أولاً ثم ب^{2} بعد إرجاعها للصورة القياسية .

⑨ في القطع الزائد إذا كان م = ب فإن المستقيمين (الخطين) المقاربين متعامدان .

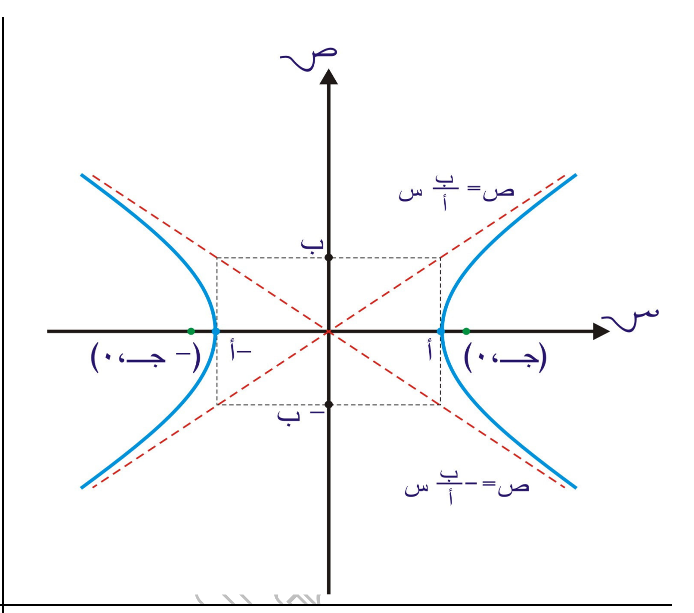
استنتاج معادلة القطع الزائد :

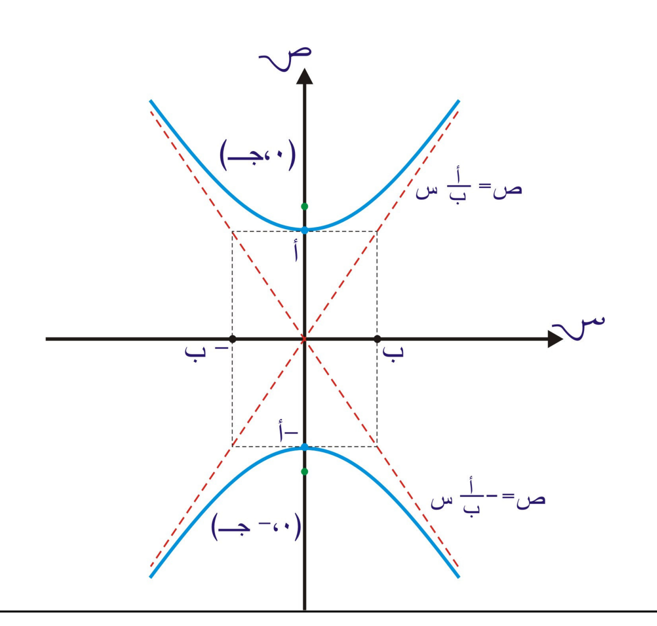


من قانون المسافة نعلم أن :

$$|ه م_1| = \sqrt{(س - ج)^2 + (\quad}$$

حالات القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠)





الحالة الأولى :

صفات القطع :

① المركز : (٠ ، ٠)

② البؤرتان : (± جـ ، ٠)

③ البعد البؤري = ٢جـ

④ الرأسان (نهايتي محوره القاطع) : (±أ ، ٠)

⑤ محوره القاطع (البؤري) منطبق على سـ ، وطوله = ٢أ ، ومعادلته : ص = ٠

⑥ محوره الغير قاطع (الغير بؤري) منطبق على صـ ، ومعادلته : س = ٠

⑦ معادلتي خطي التقارب : ص = ± $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ س

⑧ معادلة القطع :

$$\frac{\text{س}^{2}}{\text{أ}^{2}} - \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ١$$

الحالة الثانية :

صفات القطع :

① المركز : (٠ ، ٠)

② البؤرتان : (٠ ، ± جـ)

③ البعد البؤري = ٢جـ

④ الرأسان (نهايتي محوره القاطع) : (٠ ، ±أ)

⑤ محوره القاطع (البؤري) منطبق على صـ ، وطوله = ٢أ ، ومعادلته س = ٠

⑥ محوره الغير قاطع (الغير بؤري) منطبق على سـ ، ومعادلته : ص = ٠

⑦ معادلتي خطي التقارب : ص = ± $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ س

⑧ معادلة القطع :

$$\frac{\text{ص}^{2}}{\text{أ}^{2}} - \frac{\text{س}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ١$$

مثال (١) ضع معادلة القطع الزائد $٩س^٢ - ص^٢ = ٣٦$ في الصورة القياسية ، ثم أوجد :

① الرأسين ② البؤرتين ③ معادلة الخطين المقاربين

الحل :

تذكر أن : معادلة القطع الزائد الطرف الأيسر فيها = +١ .

الآن : لجعل المعادلة على الصورة القياسية نقسم جميع الحدود على ٣٦ .

ستصبح المعادلة بعد القسمة والاختصار كالتالي : $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$

تذكر أيضاً : يتحدد نوع القطع الزائد بالحد الموجب بعد ترتيب المعادلة بحيث يكون الحد الموجب أولاً ثم السالب وفي الطرف اليسر = + ١ .

∴ في المعادلة نوع القطع سيني : $أ^٢ = ٤ \Leftarrow أ = ٢$ ، $ب^٢ = ٣٦ \Leftarrow ب = ٦$

الآن : نوجد ج من العلاقة : $ج^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ج^٢ = ٤٠ \Leftarrow ج = ٢\sqrt{١٠}$

∵ القطع سيني ∴ الرأسان في السينات

① الرأسان : $(\pm أ ، ٠) = (\pm ٢ ، ٠)$

② البؤرتان : $(\pm ج ، ٠) = (\pm ٢\sqrt{١٠} ، ٠)$

③ معادلة الخطين المقاربين : $ص = \pm \frac{ب}{أ} س \Leftarrow ص = \pm ٣ س$

مثال (٢) : البعد البؤري للقطع الزائد $٩ ص^٢ - ١٦ س^٢ = -١٤٤$ يساوي

(أ) ٦وحدات (ب) $٢\sqrt{٧}$ وحدة (ج) ٨ وحدات (د) ١٠ وحدات

الحل :

نقسم جميع الحدود على -١٤٤ ، ونختصر ستصبح المعادلة :

$-\frac{ص^٢}{١٦} + \frac{س^٢}{٩} = ١$ (نرتب المعادلة)

$\Leftarrow \frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$ ∴ نوع القطع سيني

$\Leftarrow أ = ٣$ ، $ب = ٤$ ، $ج = ٥$

∴ البعد البؤري $= ٢ج = ١٠$ وحدات $\Leftarrow$ الإجابة الصحيحة : (د)

مثال (٣) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٠ ، ± ٥) ، وطول محوره القاطع ٨ وحدات .

الحل :

∵ البؤرتان تقع في المحور الصادي ∴ نوع القطع صادي ومعادلته القياسية هي :

$$\frac{ص^2}{م^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ١$$

نحتاج إلى قيم : م ، ب .

من إحداثيات البؤرتين نجد أن : جـ = ٥ .

∵ طول محوره القاطع ٨ وحدات ⇐ ٢م = ٨ ⇐ م = ٤

من العلاقة : $جـ^2 = م^2 + ب^2$ نجد أن : $ب^2 = ٩$

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{ص^2}{١٦} - \frac{س^2}{٩} = ١$

لاحظ : في الأمثلة التي تم حلها الآتي :

١ أن قيمة م ممكن تكون أكبر من قيمة ب وممكن تكون أصغر منها خلاف القطع الناقص .

٢ م دائماً المقام الموجب وتتعلق بالمحور القاطع .

٣ جـ دائماً هي القيمة الأكبر .

تطبيقات على الدرس

تطبيق (١) استنتج صفات القطع الزائد الذي معادلته :

أ) ٩ س^2 − ١٦ ص^2 = ٥٧٦ .

ب) س^2 − ٢٥ ص^2 = ١٠٠ .

تطبيق (٢) في التمارين التالية استنتج معادلة القطع الزائد :

أ) الخطان المقاربان : ص = ± ٢ س ، والرأسان (± ٦ ، ٠) .

ب) الخطان المقاربان : ص = ± ٢ س ، والرأسان (٠ ، ± ٤) .

جـ) البؤرتان : (± ٨ ، ٠) ، الرأسان : (± ٤ ، ٠)

تطبيق (٣) أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٠ ، ± ٤) ويمر بالنقطة (٢، ٨) .

حل بعض التطبيقات

تطبيق (٢) في التمارين التالية استنتج معادلة القطع الزائد :

ﺃ) الخطان المقاربان : ص = ± ٢ س ، والرأسان (± ٦ ، ٠) .

الحل :

تذكر : الرأسان هما نهايتي المحور القاطع .

الآن : ∵ إحداثي الرأسان : (± ٦ ، ٠) = (± ﺃ ، ٠) ⇐ نوع القطع سيني ، ومعادلته القياسية :

$$\frac{س^٢}{ﺃ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

نحتاج إلى قيم : ﺃ ، ب لاستنتاج معادلة القطع . الآن : من الرأسين نجد أن : ﺃ = ٦ .

∵ معادلة الخطين المقاربين : ص = ± ٢ س ونوع القطع سيني

∴ الصورة القياسية لمعادلة الخطين المقاربين : ص = ± $\frac{ب}{ﺃ}$ س ⇐ $\frac{ب}{ﺃ}$ = ٢ ⇐ $\frac{ب}{٦}$ = ٢ ⇐ ب = ١٢

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{س^٢}{٣٦} - \frac{ص^٢}{١٤٤} = ١$

تطبيق (٣) أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٠، ±٤) ويمر بالنقطة (٢، ٨) .

الحل :

من أحداثيات الرأسين نجد أن نوع القطع صادي وصورته القياسية : $\frac{ص^٢}{ﺃ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

∵ إحداثيات الرأسين : (٠، ±٤) ⇐ ﺃ = ٤

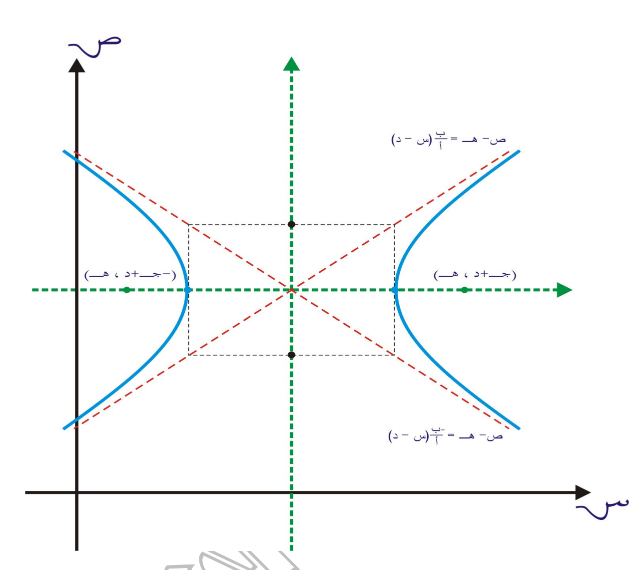
∵ القطع يمر بالنقطة : (٢، ٨) ⇐ النقطة تحقق معادلة القطع فنعوض في المعادلة بالقيم :

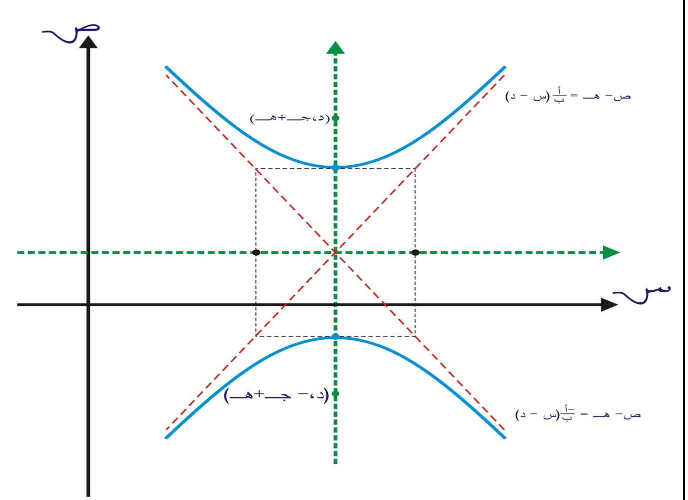
س = ٢ ، ص = ٨ ، ﺃ = ٤

⇐ $\frac{٦٤}{١٦} - \frac{٤}{ب^٢} = ١$ ⇐ ٤ − $\frac{٤}{ب^٢}$ = ١ ⇐ $\frac{٤}{ب^٢}$ = ٣ ⇐ ب^٢ = $\frac{٤}{٣}$

∴ المعادلة المطلوبة : $\frac{ص^٢}{١٦} - \frac{س^٢}{\frac{٤}{٣}} = ١$

حالات القطع الزائد الذي مركزه (ء ، هـ)





الحالة الأولى:

صفات القطع :

(١) المركز (ء ، هـ)

(٢) البؤرتان (ء ± جـ ، هـ)

(٣) البعد البؤري = ٢ جـ

(٤) الرأسان :

(نهايتي محوره القاطع) : (ء ± أ ، هـ)

(٥) المحور القاطع (البؤري) // سـ ،

وطوله = ٢أ ، ومعادلته : ص = هـ

(٦) المحور الغير قاطع (الغير بؤري) // صـ ،

وطوله = ٢ب ، ومعادلته : س = ء

(٧) معادلتي خطي التقارب :

$$(ص - هـ) = \pm \frac{ب}{أ} (س - ء)$$

(٨) معادلة القطع :

$$\frac{(س - ء)^٢}{أ^٢} - \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$$

الحالة الثانية :

صفات القطع :

(١) المركز (ء ، هـ)

(٢) البؤرتان (ء ، هـ ± جـ)

(٣) البعد البؤري = ٢ جـ

(٤) الرأسان :

(نهايتي محوره القاطع) : (ء ، هـ ± أ)

(٥) المحور القاطع (البؤري) // صـ ،

وطوله = ٢أ ، ومعادلته : س = ء

(٦) المحور الغير قاطع (الغير بؤري) // سـ ،

وطوله = ٢ب ، ومعادلته ص = هـ

(٧) معادلتي خطي التقارب :

$$(ص - هـ) = \pm \frac{أ}{ب} (س - ء)$$

(٨) معادلة القطع :

$$\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س - ء)}{ب^٢} = ١$$

مثال (١) حدد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب للقطع الزائد : ٥(س – ٣)^٢ – ٤ (ص + ١)^٢ = ٢٠

الحل :

تذكر : دائماً في معادلتي القطع الزائد والناقص ننظر للطرف اليسر هل = +١

في المعادلة : ٥(س – ٣)^٢ – ٤ (ص + ١)^٢ = ٢٠ (نقسم كل الحدود على : ٢٠)

سيكون الناتج بعد القسمة والاختصار : $\frac{(س - ٣)^٢}{٤} - \frac{(ص + ١)^٢}{٥} = ١$

∴ نوع القطع سيني ،

ولإيجاد الصفات المطلوبة نحدد المجاهيل الخمسة : ٩ ، ب ، جـ ، ء ، هـ

نجد أن : ٩ = ٢ ، ب = $\sqrt{٥}$ ، جـ = ٣ ، ء = ٣ ، هـ = – ١

الآن : الرأسان : (ء ± ٩ ، هـ) ⇐ (٥ ، – ١) و (١ ، – ١)

البؤرتان : (ء ± جـ ، هـ) ⇐ (٣ + $\sqrt{٥}$ ، – ١) و (٣ + $\sqrt{٥}$ ، – ١)

معادلة خطي التقارب :

(ص – هـ) = ± $\frac{ب}{٩}$ (س – ء) ⇐ (ص + ١) = ± $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (س – ٣)

مثال (٢) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٣ ، −٤) ، (٣ ، ٢) وطول محوره القاطع ٤ وحدات .

الحل :

من لإحداثيات البؤرتين :

∵ الإحداثي السيني ثابت والصادي متغير نجد أن نوع **القطع صادي** (أو ممكن عن طريق الرسم)

المعادلة القياسية للقطع : $\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{س} - \text{ء})}{\text{ب}^2} = ١$

(نحتاج قيم : أ ، ب ، ء ، هـ)

∵ طول المحور القاطع = ٢أ = ٤ ⇐ **أ = ٢**

∵ البؤرتان : (٣ ، −٤) ، (٣ ، ٢) = (ء ، هـ − جـ) ، (ء ، هـ + جـ)

⇐ **ء = ٣** ، هـ − جـ = − ٤ ، هـ + جـ = ٢ (بجمع المعادلتين والتعويض في أحدهما)

نجد أن : **هـ = − ١** ، **جـ = ٣**

ملاحظة :

- تحديد البؤرة العليا والسفلى من الرسم .
- ممكن نستنتج : هـ من قانون منتصف قطعة مستقيمة فنتركها للطالب الجاد .

بقيت قيمة : ب من العلاقة : جـ² = أ² + ب² **نجد أن :** **ب = $\sqrt{٥}$**

∴ **المعادلة المطلوبة :** $\frac{(\text{ص} + ١)^2}{٤} - \frac{(\text{س} - ٣)^2}{٥} = ١$

مثال (٢) : ضع معادلة القطع الزائد : $٤س^٢ - ٩ص^٢ - ٨س + ٣٦ص + ٤ = ٠$ في الصورة القياسية ، ثم أوجد :

① المركز ② البعد البؤري ③ معادلة المحور القاطع

الحل :

$٤س^٢ - ٩ص^٢ - ٨س + ٣٦ص + ٤ = ٠$ (نرتب المعادلة بتجميع المجاهيل المتشابهة مع بعضها)

$٤س^٢ - ٨س - ٩ص^٢ + ٣٦ص = -٤$ (ننقل الحد الثابت فقط للطرف الآخر)

$٤(س^٢ - ٢س) - ٩(ص^٢ - ٤ص) = -٤$ (جعلنا معامل $س^٢$ و $ص^٢$ (+ ١) بأخذ عامل مشترك)

$٤(س^٢ - ٢س + ١) - ٩(ص^٢ - ٤ص + ٤) = -٤ + ٤ - ٣٦$

(أضفنا مربع نصف معامل س و ص للطرف الأيمن وكذلك الأيسر ولكن بعد ضربه في العامل المشترك)

$٤(س - ١)^٢ - ٩(ص - ٢)^٢ = -٣٦$ (أكملنا المربع ثم بالقسمة على : − ٣٦ والاختصار)

$$\frac{-(س - ١)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٤} = ١$$ (نرتب المعادلة :)

$$\frac{(ص - ٢)^٢}{٤} - \frac{(س - ١)^٢}{٩} = ١$$

∴ نوع القطع صادي ، ونجد أن : أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = $\sqrt{١٣}$ ، ء = ١ ، هـ = ٢

① المركز : (ء ، هـ) = (١ ، ٢)

② البعد البؤري = ٢جـ = $٢\sqrt{١٣}$

③ معادلة المحور القاطع : س = ء ⇐ س = ١

تطبيقات على الدرس

تطبيق (١) استنتج صفات القطع الزائد الذي معادلته :

أ) ٤ س^{٢} − ٥ ص^{٢} − ١٦ س + ١٠ ص + ٣١ = ٠

ب) ٥ س^{٢} − ٤ ص^{٢} + ٢٠ س + ٨ص − ٤ = ٠

جـ) ١٦ س^{٢} + ٣٢ س − ٩ (ص − ١)^{٢} = ١٢٨

تطبيق (٢)

استنتج معادلة القطع الزائد الذي رأساه (١ ، ١) ، (− ٣ ، ١) ويمر بالنقطة : ($\sqrt{٨}$ − ١ ، ٠) .

تطبيق (٣)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (١ ، − ١) ومحوره القاطع // سـ وطوله ٨ وحدات والبعد البؤري ٢٠ وحدة .

تطبيق (٤)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه هو رأس القطع المكافئ الذي معادلته :

س^{٢} − ٦ س − ٤ ص + ٢٥ = صفر ،

وإحدى بؤرتيه (− ٧ ، ٤) وطول محوره القاطع ١٢ وحدة .

حل بعض تطبيقات على درس القطع الزائد

تطبيق (١) استنتج صفات القطع الزائد الذي معادلته :

أ) ٤ س^{٢} – ٥ ص^{٢} – ١٦ س + ١٠ ص + ٣١ = ٠

الحل :

٤ س^{٢} – ٥ ص^{٢} – ١٦ س + ١٠ ص + ٣١ = ٠ (نرتب المعادلة بتجميع المجاهيل المتشابهة مع بعضها)

٤س^{٢} – ١٦ س – ٥ص^{٢} + ١٠ ص = – ٣١ (ننقل الحد الثابت فقط للطرف الآخر)

٤(س^{٢} – ٤س) – ٥ (ص^{٢} – ٢ ص) = – ٣١ (جعلنا معامل س^{٢} و ص^{٢} (+ ١) بأخذ عامل مشترك)

٤(س^{٢} – ٤س + ٤) – ٥(ص^{٢} – ٢ ص + ١) = – ٣١ + ١٦ – ٥

(أضفنا مربع نصف معامل س و ص للطرف الأيمن وكذلك الأيسر ولكن بعد ضربه في العامل المشترك)

٤(س – ٢)^{٢} – ٥ (ص – ١)^{٢} = – ٢٠ (أكملنا المربع ثم بالقسمة على : – ٢٠ والاختصار)

$$\frac{-(س - ٢)^{٢}}{٥} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٤} = ١$$

(نرتب المعادلة :)

$$\frac{(ص - ١)^{٢}}{٤} - \frac{(س - ٢)^{٢}}{٥} = ١$$

∴ نوع القطع صادي ، ونجد أن : أ = ٢ ، ب = $\sqrt{٥}$ ، جـ = ٣ ، ء = ٢ ، هـ = ١

① المركز : (ء ، هـ) = (٢ ، ١) ② البؤرتان : (٢ ، ٤) ، (٢ ، – ٢)

③ نهايتي المحور القاطع : (٢ ، ٣) ، (٢ ، – ١)

والبقية مثلما حله الأخ طالب الجنة ١

تطبيق (٢) بين أن المعادلة التالية تمثل قطع زائد ثم استنتج صفاته :

$$ص^٢ - ٤ س^٢ - ٤ ص + ٨ = ٠$$

الحل :

لاستنتاج صفات القطع نجعل المعادلة على صورة مربع كامل كالتالي :

$ص^٢ - ٤ ص - ٤ س^٢ + ٨ = ٠$ (نرتب المعادلة بتجميع المجاهيل المتشابهة مع بعضها)

$ص^٢ - ٤ ص - ٤ س^٢ = - ٨$ (ننقل الحد الثابت فقط للطرف الآخر)

$ص^٢ - ٤ ص + ٤ - ٤ س^٢ = - ٨ + ٤$ (أضفنا مربع نصف معامل ص للطرفين)

$(ص - ٢)^٢ - ٤ س^٢ = - ٤$ (جعلنا الصادات على صورة مربع كامل)

$$\frac{س^٢}{١} - \frac{(ص - ٢)^٢}{٤} = ١$$ (قسمنا الطرفين على - ٤)

∴ نوع القطع سيني ، ونجد أن : ٱ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = $\sqrt{٥}$ ، ء = ٠ ، هـ = ٢

① المركز : (ء ، هـ) = (٠ ، ٢)   ② البؤرتان : (± $\sqrt{٥}$ ، ٢)

③ نهايتي المحور القاطع : (± ١ ، ٢)

وبقية الصفات أظنها واضحة

حل سؤال تطبيقي على القطع الزائد

تطبيق (١) :

للقطع الزائد التالي : $\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{ص^{٢}}{٢} = ١$

١ **حدد قيم :** أ ، ب ، جـ ، ثم أوجد ، ثم أوجد حداثيات البؤرتين : $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$.

٢ **أثبت أن النقطة :** هـ (٥ ، $\frac{١٦}{٣}$) تقع على منحنى القطع .

٣ **أوجد :** | هـ $ب_{١}$ | و | هـ $ب_{٢}$ | .

٤ **تحقق :** أن الفرق بين : | هـ $ب_{١}$ | و | هـ $ب_{٢}$ | = ٢ أ .

تطبيق (٢) :

أثبت أن القطوع الزائدية التي تمثل بالمعادلة : $\frac{ص^{٢}}{هـ} - \frac{س^{٢}}{١٦ - هـ} = ١$ ، ١٦ > هـ > ٠

لها نفس البؤرة ، ثم أوجد إحداثيات البؤرة وحدد نوع القطع .

تطبيق (٣) :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي يمس المستقيمين : س − ٤ ص = ١٠ ، س + ص = ٥ .

تطبيق (٤) :

أوجد معادلة القطع الزائد إذا علمت أن خطيه المقاربين هما :

ص = ± $\frac{١}{٢}$ س ، ويمر بالنقطة : (١٢ ، ٣$\sqrt{٣}$) .

تطبيق (٥) :

نهايتا المحور الأكبر لقطع ناقص هما : (± ١٣ ، ٠) ، وتقع إحدى بؤرتيه على الخط المستقيم :

٣ س − ص + ٢٤ = ٠ ، أوجد معادلته .

خطوات رسم القطع الزائد :

① نعين النقاط : (٢ ، –٢ ، ب ، –ب) .

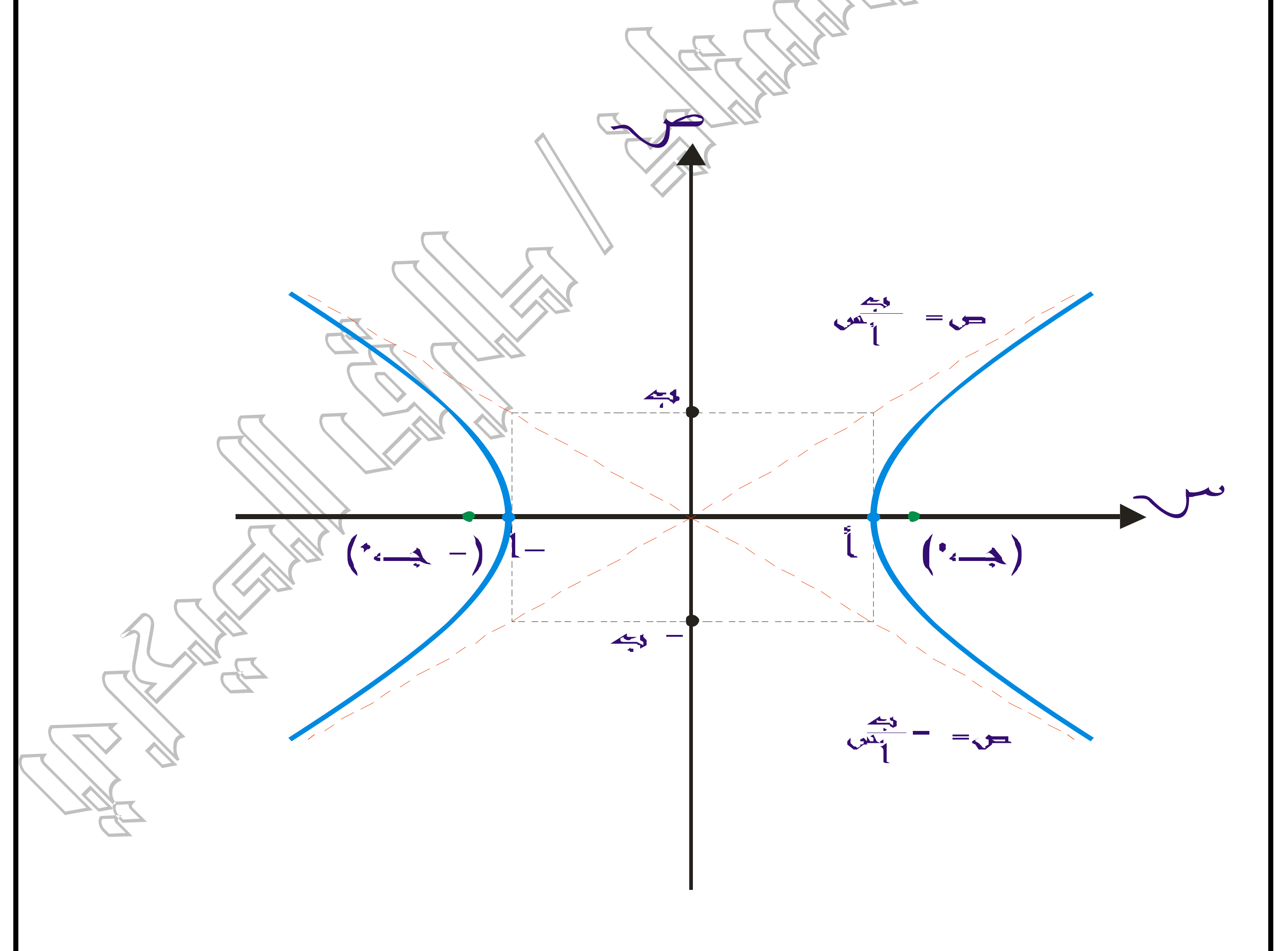
② نرسم مستطيل كما هو موضح في الشكل أسفل .

② نحدد الرأسين ونكتب عليهما ٢ ، – ٢ .

③ نرسم قطري المستطيل ونمدهما في الجهتين ونحصل بذلك على الخطين التقاربيين .

④ نعين البؤرتين .

⑤ من ٢ ، –٢ نرسم قطعين مكافئين بجوار الخطين التقاربيين كما هو في الرسم أسفل .



رابعاً : القطوع المخروطية ومعادلة الدرجة الثانية :

س) لماذا سميت قطوع مخروطية ؟

ينشأ (ينتج) القطع المخروطي من قَطع المخروط الدائري القائم بمستوى في اتجاهات متعدده فإن كان :

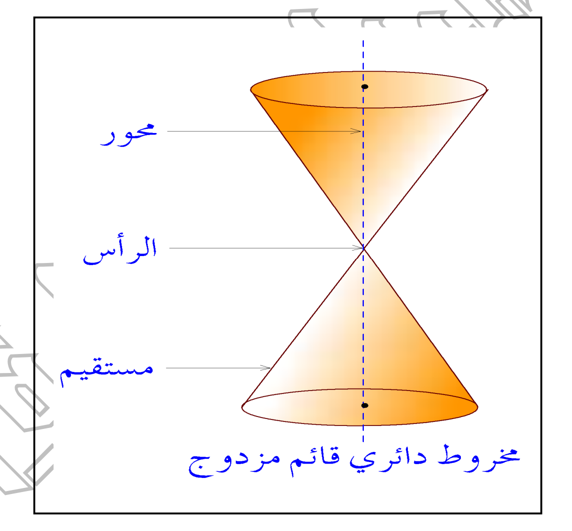
المستوى ليس عمودياً على المحور وموازي لراسم فيه كان المقطع قطع مكافئ .

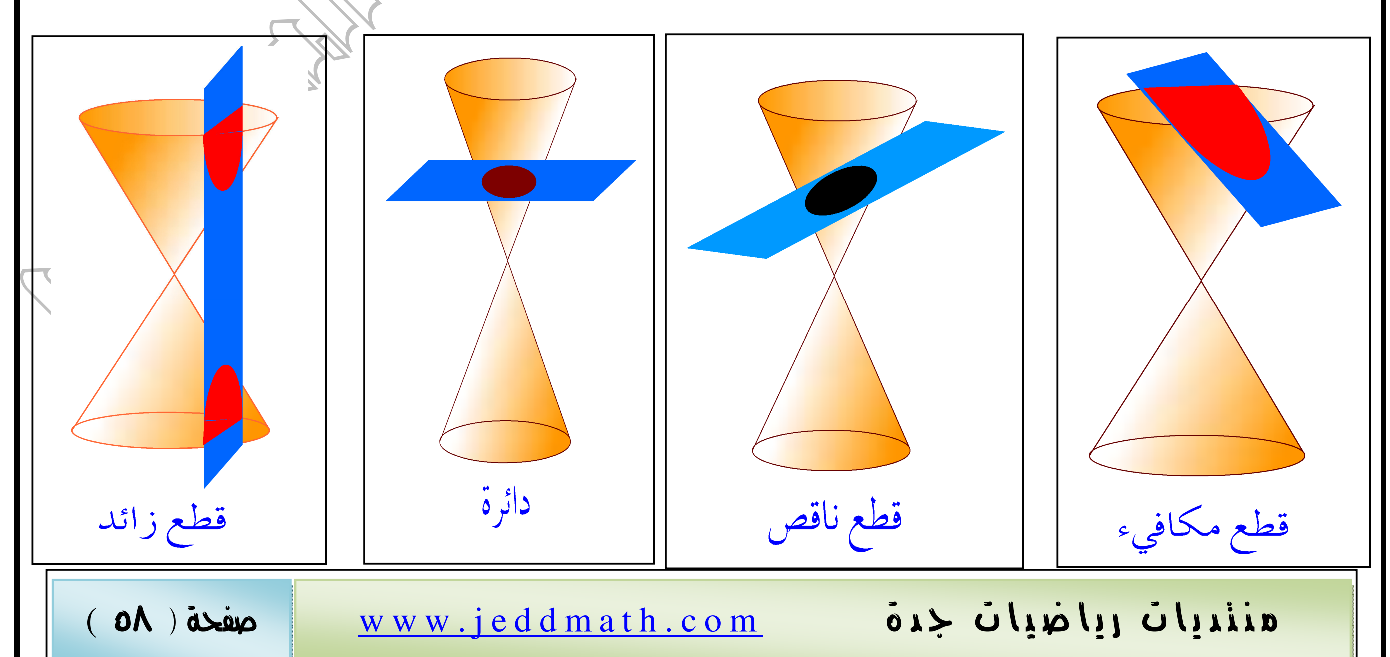
المستوى ليس عمودياً على المحور وغير موازي لراسمه كان المقطع قطع ناقص .

المستوى عمودياً على المحور كان المقطع دائرة .

المستوى موازياً المحور كان المقطع قطع زائد .

وحسب وضع المستوى القاطع ... بالنسبة لمحور المخروط الدائري القائم وقاعدته وراسمه .... الأشكال التالية توضح ذلك :





كيف يتم تمييز معادلات القطوع المخروطية ؟

معادلة القطوع المخروطية هي معادلة من الدرجة الثانية في متغيرين .

إذا كانت المعادلة $ء س^٢ + ب ص^٢ + جـ س + ء ص + هـ = ٠$ تمثل قطعاً مخروطياً فإنها تكون :

(١) قطعاً مكافئاً إذا كان $ء \times ب = ٠$ (إذا وجدت $س^٢$ فقط أو $ص^٢$ فقط)

(٢) قطعاً ناقصاً إذا كان $ء \times ب > ٠$ (إذا كانت $س^٢$ ، $ص^٢$ لهما نفس الإشارة)

(٣) ويكون القطع الناقص دائرة إذا كان : $ء = ب$

(٤) قطعاً زائداً إذا كان $ء \times ب < ٠$ (إذا كانت $س^٢$ ، $ص^٢$ لهما أشارتان مختلفتان)

ملاحظة مهمة (١) :

المعادلة السابقة إذا لم تكن قطعاً مخروطياً فإنها قد تكون مستحيلة الحل في ح ، وقد تمثل نقطة

ونعرف ذلك بعد إرجاعها للصورة القياسية .

ملاحظة مهمة (٢) :

معنى أن المعادلة مستحيلة الحل في ح ، أن حلها ضمن الأعداد المركبة أي يكون القطع تخيلي ، وهذا لايتضح إلا بعد إرجاع المعادلة للصورة القياسية وطبعاً هذا خارج عن دراستنا لأن المعادلات التي ندرسها ضمن الأعداد الحقيقية ح فقط .

مثال (١)

حدد نوع القطع للمعادلة : ٢س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٤ س – ٦ ص + ١١ = صفر .

الحل :

نلاحظ أن : أ = ٢ ، ب = ٣ ، أ × ب = ٢ × ٣ = ٦ > ٠

∴ نوع القطع : قطع ناقص .

مثال (٢) : حدد نوع القطع للمعادلة : ٤ س^{٢} – ص^{٢} + ٨ س + ٤ = صفر

الحل :

نلاحظ أن : أ = ٤ ، ب = – ١ ، أ × ب = ٤ × – ١ = – ٤ < ٠

∴ نوع القطع : قطع زائد .

مثال (٣) : حدد نوع القطع للمعادلة : س^{٢} + ٤ س – ص + ٤ = صفر

الحل :

نلاحظ أن : أ = ١ ، ب = ٠ ، أ × ب = ١ × ٠ = ٠

∴ نوع القطع : قطع مكافئ .

مثال (٣) : حدد نوع القطع للمعادلة :

$$س^٢ + ٢ س + ٩ص^٢ - ١٨ ص + ١١ = صفر$$

الحل :

نلاحظ أن : ٩ = ١ ، ب = ٩ ، ٩ × ب = ١ × ٩ = ٩

∴ نوع القطع : قطع ناقص .

نكمل المربع للتأكد :

$$س^٢ + ٢ س + ٩ص^٢ - ١٨ ص + ١٩ = صفر$$

$$س^٢ + ٢ س + ٩ص^٢ - ١٨ص = - ١٩$$ (نقلنا الحد الثابت فقط للطرف الآخر)

$$(س^٢ + ٢ س) + ٩ (ص^٢ - ٢ ص) = - ١٩$$ (جعلنا معامل ص^٢ (+ ١) بأخذ عامل مشترك)

$$(س^٢ + ٢ س + ١) + ٩(ص^٢ - ٢ ص + ١) = - ١٩ + ١ + ٩$$

$$(س + ١)^٢ + ٩ (ص - ١)^٢ = - ٩$$ (أكملنا المربع ثم بالقسمة على ٩ والاختصار)

$$\frac{(س - ١)^٢}{٩} + \frac{(ص - ١)^٢}{١} = - ١$$

واضح أنه مستحيل أن يكون حاصل جمع مربعين = - ١

∴ المنحنى ليس قطعاً ناقصاً أو زائداً حقيقياً ، أي المنحنى ليس ضمن الأعداد الحقيقية .

∴ المنحنى قطع ناقص تخيلي .

تطبيقات على الدرس

تطبيق (١) :

اختر من المجموعة م ما يناسبها من المجموعة ب

المعادلة (م −٣) س^{٢} + ص^{٢} + س = ٧

م	ب
① تمثل معادلة قطعا مكافئا عندما.......	(م) م > ٣
② تمثل معادلة قطعا ناقصا عندما.......	(ب) م < ٣
③ تمثل معادلة قطعا زائدا عندما......	(ج) م = ٤
④ تمثل معادلة دائـــــرة عندما........	(ء) م = ٣

تطبيق (٢) :

صنف المعادلات التالية من حيث نوع القطع :

① ٣ س^{٢} − ٢ ص^{٢} − ١٢ س + ٨ ص + ٩ = ٠

② ٢٥ س^{٢} + ٩ ص^{٢} + ٥٠ س + ٩٠ ص + ٢٠ = ٠

③ س^{٢} + ٢ ص + ٨ س + ١٠ = ٠

④ س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س + ٦ ص + ١٨ = ٠

⑤ ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٤ س − ٦ ص − ٧ = ٠

⑥ ٥ س^{٢} +٥ ص^{٢} + ١٠ س + ٨ ص − ٤ = ٠

نطبيقات على الدرس

تطبيق (١) :

هل المعادلة التالية تمثل معادلة قطع ناقص : $\frac{س^{٢}}{هـ} + \frac{ص^{٢}}{هـ + ٤} = ١$ ، هـ > ٠

حيث أن : هـ > ٠ ، ثم أثبت أن جميع القطوع التي تمثل بنفس المعادلة لها نفس البؤرة مهما كانت : هـ > ٠ ، ثم أوجد إحداثياتها وحدد نوع القطع .